Contrôle n^o 3 du 10/12/2014

Julien Reichert

Exercice 1, sujet 1

Donner le tableau de variations de la fonction inverse.

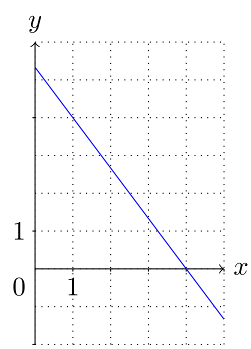
Exercice 1, sujet 2

Donner le tableau de variations de la fonction carré.

Exercice 2, sujet 1

Soit la fonction affine f dont la courbe est représentée ci-dessous. La courbe représentative de f passe par les points $(1;4)$ et $(4;0)$ et elle est dessinée ci-dessous.

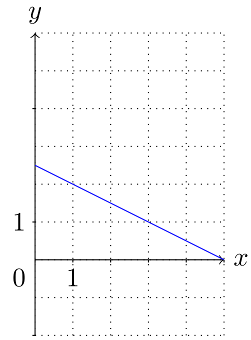
Donner l'expression de la fonction f avec des détails qui montrent la méthode (au choix) utilisée.



Exercice 2, sujet 2

Soit la fonction affine f dont la courbe est représentée ci-dessous. La courbe représentative de f passe par les points $(1;2)$ et $(5;0)$ et elle est dessinée ci-dessous.

Donner l'expression de la fonction f avec des détails qui montrent la méthode (au choix) utilisée.



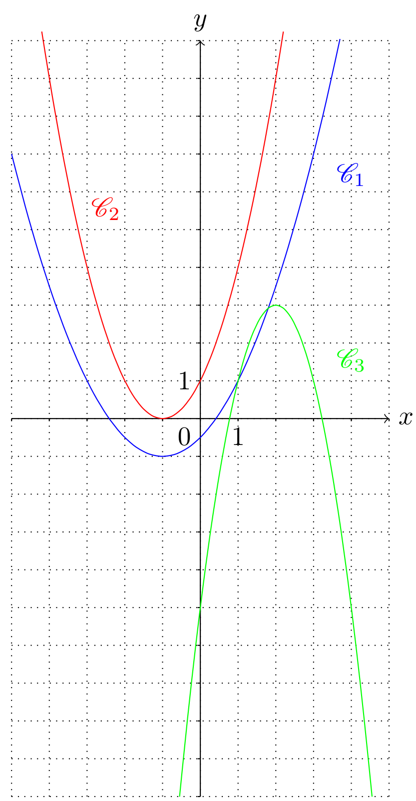
Exercice 3, sujet 1

Le graphique ci-dessous représente trois courbes de fonctions polynomiales de degré 2.

1) Quelle courbe correspond à la fonction dont la forme canonique est $\frac{1}{2}(x+1)^2-1$? Justifier en détaillant la méthode.

2) Quelle courbe correspond à la fonction x^2+2x+1 ? Justifier en détaillant la méthode.

3) Donner les formes canonique et développée de la fonction dont la courbe est celle qui reste. Justifier en détaillant la méthode.



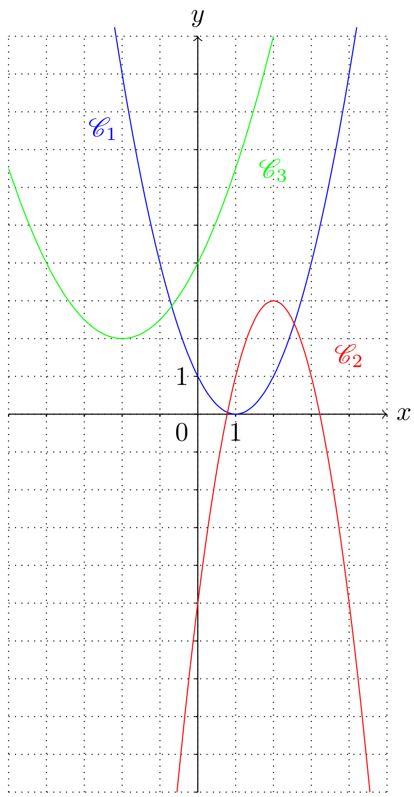
Exercice 3, sujet 2

Le graphique ci-dessous représente trois courbes de fonctions polynomiales de degré 2.

1) Quelle courbe correspond à la fonction dont la forme canonique est $\frac{1}{2}(x+2)^2+2$? Justifier en détaillant la méthode.

2) Quelle courbe correspond à la fonction x^2-2x+1 ? Justifier en détaillant la méthode.

3) Donner les formes canonique et développée de la fonction dont la courbe est celle qui reste. Justifier en détaillant la méthode.



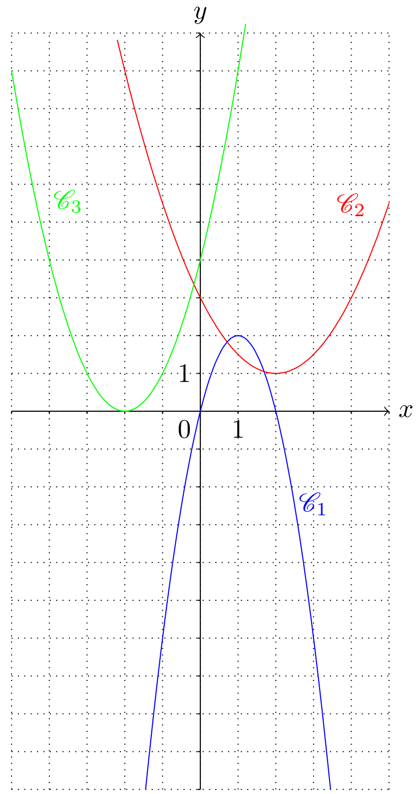
Exercice 3, sujet 3

Le graphique ci-dessous représente trois courbes de fonctions polynomiales de degré 2.

1) Quelle courbe correspond à la fonction dont la forme canonique est $\frac{1}{2}(x-2)^2+1$? Justifier en détaillant la méthode.

2) Quelle courbe correspond à la fonction x^2+4x+4 ? Justifier en détaillant la méthode.

3) Donner les formes canonique et développée de la fonction dont la courbe est celle qui reste. Justifier en détaillant la méthode.



Exercice 4, sujet 1

On considère une fonction homographique d'expression $f(x) = \frac{4x+2}{1-x}$.

1) Étant donné que l'expression habituelle d'une fonction homographique est de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$, quelles sont ici les valeurs de a, b, c et d ?

2) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

3) Calculer $ad - bc$ et $\frac{a}{c}$.

4) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5) Calculer $f(2)$ et $f(4)$. Vérifier la cohérence du tableau de variations.

Exercice 4, sujet 2

On considère une fonction homographique d'expression $f(x) = \frac{4x+2}{1+x}$.

1) Étant donné que l'expression habituelle d'une fonction homographique est de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$, quelles sont ici les valeurs de a, b, c et d ?

2) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

3) Calculer $ad - bc$ et $\frac{a}{c}$.

4) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5) Calculer $f(2)$ et $f(4)$. Vérifier la cohérence du tableau de variations.

Exercice 4, sujet 3

On considère une fonction homographique d'expression $f(x) = \frac{4x-2}{1+x}$.

1) Étant donné que l'expression habituelle d'une fonction homographique est de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$, quelles sont ici les valeurs de a, b, c et d ?

2) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

3) Calculer $ad - bc$ et $\frac{a}{c}$.

4) En déduire le tableau de variations de la fonction f.

5) Calculer $f(2)$ et $f(4)$. Vérifier la cohérence du tableau de variations.

Activité supplémentaire pour ceux qui ont fini

1) Fonctions polynomiales de degré 2

Dans cette activité, au lieu de développer une forme canonique de fonction polynomiale, nous allons faire l'opération contraire.

Le cours donne l'expression de a, b et c en fonction de a, α et β, et il est possible de retrouver ces dernières en fonction de a, b et c directement. Toutefois, il s'agit de le faire par l'intuition, en commençant par un cas simple.

Soit la fonction d'expression $f(x) = x^2+bx+c$. Il existe forcément une identité remarquable égale à $f(x)$, à l'addition près d'une constante. Cette identité remarquable doit donc se développer en x^2+bx+d, le terme constant d devant être cohérent avec les deux autres. Dans ce cas, l'identité remarquable se factorise en $(x+\frac{b}{2})^2$, car ceci est justement $x^2+2\frac{b}{2}x+(\frac{b}{2})^2 = x^2+bx+\frac{b^2}{4}$. Pour conclure, $x^2+bx+c = x^2+bx+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c = (x+\frac{b}{2})^2+(-\frac{b^2}{4}+c)$, qui est une forme canonique.

Dans le cas général, il suffit de factoriser par a : $ax^2+bx+c = a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})$, et on applique ce qui précède avec $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$. On obtient alors $ax^2+bx+c = a((x+\frac{b}{2a})^2+(-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a})) = a(x+\frac{b}{2a})^2+(-\frac{b^2}{4a}+c)$.

Cette forme canonique, en plus des applications géométriques utilisées dans le contrôle, permet de trouver une factorisation éventuelle de l'expression (et donc une résolution de l'équation $f(x) = 0$, un produit étant nul si et seulement si l'un des facteurs est nul).

On réécrit en mettant au même dénominateur : $ax^2+bx+c = a((x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b^2-4ac}{4a^2}))$.

Alors :
- Si b^2-4ac est strictement négatif, alors le contenu de la parenthèse est toujours strictement positif et il est impossible de factoriser encore l'expression.
- Si b^2-4ac est nul, alors l'expression est déjà factorisée et s'annule pour $x = -\frac{b}{2a}$.
- Si b^2-4ac est strictement positif, alors on peut le voir comme le carré d'un réel et on trouve une identité remarquable $a(A^2-B^2)$, de sorte que $ax^2+bx+c = a((x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}))$.

Exercice : Mettre sous forme canonique puis factorisée si possible les expressions x^2-5x+6, x^2-8x+5 (voir le contrôle précédent, exercice 3, question 2b) et x^2+4x+8.

2) Fonctions homographiques

L'expression d'une fonction homographique est $\frac{ax+b}{cx+d}$, sa forme réduite est $\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma$. Le passage de la forme réduite à la forme habituelle passe par la mise au même dénominateur, et l'opération contraire est également faisable. Pour ce faire, il s'agit de trouver dans le numérateur un multiple du dénominateur.

Ainsi, on écrit $ax+b$ comme quelque chose fois $cx+d$ plus le reste, une constante. On remarque que, vu les nombres devant les x, il faut que $cx+d$ soit multiplié par $\frac{a}{c}$. Ainsi, $\frac{a}{c}(cx+d) = \frac{a}{c}(cx)+\frac{a}{c}d = ax+\frac{ad}{c}$. On en déduit que $ax+b = ax+\frac{ad}{c}-\frac{ad}{c}+b = \frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b$.

En revenant à l'expression de la fonction, $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)-\frac{ad}{c}+b}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c}+\frac{-\frac{ad}{c}+b}{c(x+\frac{d}{c})} = \frac{\frac{-ad+bc}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}+\frac{a}{c}$.

On a donc bien la forme $\frac{\alpha}{x-\beta}+\gamma$ avec $\alpha = \frac{bc-ad}{c^2}, \beta = -\frac{d}{c}$ et $\gamma = \frac{a}{c}$.

Exercice : Mettre sous forme réduite les expressions $\frac{4x+8}{2x+3}$, $\frac{x-1}{x+1}$ et $\frac{9x+12}{6x-3}$.