Chapitre 2 : Équations

Julien Reichert

1 Introduction

Une équation est une égalité faisant intervenir une (ou plusieurs) inconnue(s).

Exemple : $2x + 4 = 9$.

Résoudre une équation, c'est déterminer les valeurs (potentiellement aucune, une, plusieurs, une infinité) telles que l'égalité soit vérifiée si l'inconnue prend une telle valeur. S'il y a plusieurs inconnues, il s'agit de déterminer les couples, triplets, quadruplets, etc. de valeurs telles que l'égalité soit vérifiée si le couple, triplet, quadruplet, etc. d'inconnues prend les valeurs respectives.

Le degré d'une équation à une inconnue est l'exposant maximal de l'inconnue, s'il n'y a pas de dénominateur.

2 Résoudre une équation

2.1 Propriétés fondamentales

L'ensemble des solutions d'une équation ne change pas si on multiplie à gauche et à droite par le même réel **non nul**, ainsi que si on ajoute à gauche et à droite le même réel.

Cela vaut également si l'inconnue est impliquée. Ainsi, on peut ajouter $2x$ à gauche et à droite, et on peut multiplier ou diviser par x **sous réserve d'exclure la valeur** 0 **de l'ensemble des solutions**.

Bien entendu, transformer par simplification, factorisation ou développement est toujours possible.

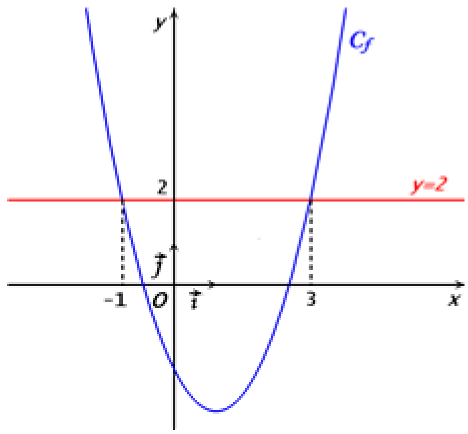
Dans l'exemple ci-dessus, on fait deux transformations successives (par exemple) : on additionne -4 à gauche et à droite et on multiplie ensuite par $\frac{1}{2}$ à gauche et à droite.

$$\begin{array}{rcl} 2x+4 & = & 9 \\ 2x & = & 5 \\ x & = & \frac{5}{2} \end{array}$$

La solution de l'équation est donc $\frac{5}{2}$.

2.2 Lecture graphique

Si on dispose de la courbe d'une fonction f, résoudre l'équation $f(x) = k$, pour un certain réel k, c'est chercher l'abscisse des points de la courbe qui ont k pour ordonnée. On cherche en quelque sorte l'intersection de la courbe avec la droite horizontale d'ordonnée k.



Dans l'exemple ci-dessus, C_f est la courbe de f, et on cherche à résoudre l'équation $f(x) = 2$. On lit des valeurs approximatives pour les solutions : -1 et 3.

Ces valeurs peuvent être confirmées par le calcul en remplaçant x par -1 ou 3 dans l'expression de f et en cherchant à retrouver 2. Cette vérification peut s'effectuer pour toute résolution d'équation, pour détecter d'éventuelles erreurs de calcul, voire de raisonnement.

2.3 Autres cas

Dans un premier temps, les équations ne concernent que des expressions factorisées ou factorisables.

On rappelle qu'**un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul**.

Ainsi, une équation de type $A \times B = 0$, où A et B sont des expressions où x intervient, aura pour solution la réunion de l'ensemble des solutions de $A = 0$ et de l'ensemble des solutions de $B = 0$, ces deux équations étant plus faciles à résoudre (typiquement, elles seront de degré 1). Ceci s'étend bien entendu au cas où il y a plus de deux expressions multipliées entre elles.

Exemple : L'équation $(2x+3)(6-x) = 0$ admet pour solutions $-\frac{3}{2}$ (solution de $2x+3=0$, obtenue en utilisant les propriétés fondamentales) et 6 (solution de $6-x=0$).

Il est très important de savoir détecter une identité remarquable développée et de la factoriser, afin de se ramener au cas ci-dessus.

Exemple : L'équation $x^2+6x+9=0$ admet pour solution -3, car $x^2+6x+9=(x+3)^2$ et ce carré ne s'annule que quand $x+3=0$.

Parfois, une factorisation évidente apparaît car un facteur commun est bien visible.

Exemple : L'équation $(2x+1)(4-x) = (2x+1)(x+2)$ admet pour solutions $-\frac{1}{2}$ et 1 car on écrit successivement :

$$\begin{array}{rcll}
(2x+1)(4-x) & = & (2x+1)(x+2) & \\
(2x+1)(4-x)-(2x+1)(x+2) & = & 0 & \text{(propriété fondamentale)} \\
(2x+1)[(4-x)-(x+2)] & = & 0 & \text{(factorisation par } 2x+1\text{)} \\
(2x+1)(4-x-x-2) & = & 0 & \text{(attention au changement de signe)} \\
(2x+1)(2-2x) & = & 0 & \text{(simplification)}
\end{array}$$

et puisqu'un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, on en déduit les deux équations pour trouver les solutions annoncées.

Une méthode de factorisation plus efficace est au programme en 1[re], mais elle ne peut qu'être intuitée en 2[de].

Enfin, dans le cas où on a un quotient, par exemple une équation $\frac{A}{B} = 0$, où A et B sont des expressions qui dépendent de x, l'ensemble des solutions à cette équation est l'ensemble des solutions à $A = 0$ dont on exclut les valeurs interdites qui sont les solutions à $B = 0$.

Par extension, l'équation $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ admet pour solutions les solutions de $AD = BC$ (produit en croix) qui ne sont pas solutions de $B = 0$ ni de $D = 0$.

Exemple : Soit l'équation $\frac{1}{x-1} = \frac{-1}{x+2}$. On exclut les valeurs -2 et 1 pour x, car un dénominateur s'annule alors. L'ensemble des solutions à cette équation est celui de $1(x+2) = -1(x-1)$, soit :

$$\begin{array}{rcll} x+2 & = & -x+1 & \text{(développement des parenthèses)} \\ x & = & -x-1 & \text{(soustraction de 2 à gauche et à droite)} \\ 2x & = & -1 & \text{(addition de } x \text{ à gauche et à droite)} \\ x & = & -\frac{1}{2} & \text{(division par 2 à gauche et à droite)} \end{array}$$

3 Résoudre une inéquation

Une équation est une inégalité faisant intervenir une inconnue.

Exemple : $2x + 4 > 9$.

L'inégalité est stricte si le symbole est $>$ ou $<$ et large si le symbole est $\geqslant$ ou $\leqslant$.

Résoudre une inéquation, c'est déterminer les valeurs (en général une réunion d'intervalles) telles que l'inégalité soit vérifiée si l'inconnue prend une telle valeur.

Les inéquations peuvent aussi être résolues par une propriété fondamentale : l'ensemble des solutions d'une inéquation ne change pas si on multiplie à gauche et à droite par le même réel **strictement positif**, ainsi que si on ajoute à gauche et à droite le même réel.

Ces propriétés donnent pour l'équation ci-dessus :

$$\begin{array}{rcl} 2x+4 & > & 9 \\ 2x & > & 5 \\ x & > & \frac{5}{2} \end{array}$$

Si on multiplie à gauche et à droite par le même réel **strictement négatif** ou si on permute les membres gauche et droit de l'inégalité, il faut changer le sens de l'inégalité, c'est-à-dire remplacer $>$ par $<$ et vice-versa, ou $\geqslant$ par $\leqslant$ et vice-versa[1].

Exemple :

$$\begin{array}{rcll} x+4 & \leqslant & 1+2x & \\ x & \leqslant & -3+2x & \text{(on ajoute } -4 \text{ à gauche et à droite)} \\ -x & \leqslant & -3 & \text{(on ajoute } -2x \text{ à gauche et à droite)} \\ x & \geqslant & 3 & \text{(on multiplie par } -1 \text{ à gauche et à droite, et donc on change le sens)} \end{array}$$

Cela vaut également si l'inconnue est impliquée. Ainsi, on peut ajouter $2x$ à gauche et à droite, mais mieux vaut éviter de multiplier ou diviser par x quand son signe n'est pas fixé.

Bien entendu, transformer par simplification, factorisation ou développement est toujours possible.

1. Au passage, le contraire de $\leqslant$ est cependant $>$ et le contraire de $\geqslant$ est $<$. La nuance est la suivante : si $x < 2$, c'est que $2 > x$. Et s'il est faut de dire que $x < 2$, c'est que $x \geqslant 2$.

3.1 Lecture graphique

Si on dispose de la courbe d'une fonction f, résoudre l'inéquation $f(x) > k$, pour un certain réel k, c'est chercher l'abscisse des points de la courbe qui ont un réel strictement supérieur à k pour ordonnée. On cherche en quelque sorte si la courbe est au-dessus ou au-dessous de la droite horizontale d'ordonnée k, en incluant ou non les cas d'inégalité suivant le symbole.

Dans l'exemple de la section précédente, l'inéquation $f(x) > 2$ admet pour solution la réunion des intervalles $]-\infty; -1[$ et $]3; +\infty[$. En effet, la courbe de f est au-dessus de la droite horizontale des points d'ordonnée 2 quand l'abscisse x est strictement inférieure à -1 ou quand elle est strictement supérieure à 3, d'où la réunion d'intervalles. Dans ces intervalles, les infinis sont toujours exclus, mais les valeurs -1 et 3 sont exclues parce que l'inégalité est stricte.

La position relative des courbes des fonctions f et g permet de résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ (et pour tout autre symbole d'inégalité). En effet, si la courbe de f est au-dessus de la courbe de g, c'est que $f(x) \geqslant g(x)$, par exemple. On retrouve le résultat du paragraphe précédent quand la fonction g est constante.

3.2 Autres cas

En pratique, on résout toujours l'équation sur laquelle une inéquation s'appuie, même si ce n'est que de façon implicite. Ce qui compte, c'est de se ramener à une inégalité dont l'un des membres est une expression factorisée et l'autre membre est 0. Ensuite, il s'agit de déterminer le signe de chacun des facteurs, en sachant que multiplier deux nombres de signe opposé donne un nombre négatif et multiplier deux nombres de même signe donne un nombre positif. Cette règle du signe des produits s'étend à autant de facteurs qu'on veut.

Exemple : Soit l'inéquation $(x+1)x^2 > -5(x+1)$. En utilisant la propriété fondamentale, on additionne $5(x+1)$ à gauche et à droite, ce qui nous ramène à $(x+1)x^2 + 5(x+1) > 0$. Ici, la factorisation est bien visible avec $(x+1)$ comme facteur commun. On obtient une inéquation avec une forme factorisée $(x+1)(x^2+5) > 0$. Le signe du premier facteur, $x+1$, est $+$ à partir de -1 mais $-$ avant. Le signe de x^2+5 est toujours $+$ car on additionne un nombre strictement positif, à savoir 5, à un nombre toujours positif en tant que carré. Ainsi, le signe du produit est lui aussi $+$ à partir de -1 mais $-$ avant. L'ensemble des solutions à l'inéquation sera alors l'ensemble des x pour lesquels le signe sera $+$, en excluant les cas à la limite où la valeur est 0, soit l'intervalle $]-1; +\infty[$.

On retrouve la solution à l'équation d'appui, $(x+1)x^2 = -5(x+1)$ pour $x = -1$.

Pour vérifier le signe obtenu (voire pour ne pas prendre la peine de le calculer), on peut aussi découper $\mathbb{R}$ en intervalles délimités par les valeurs interdites et les solutions de l'équation d'appui, et pour chacun des intervalles en question, on considère que le signe reste toujours le même [2], donc calculer le signe pour une valeur particulière au choix permet de trancher. Cependant, le nombre d'intervalles à tester sera du même ordre que le nombre de produits à faire.

2. ce qui n'est pas vrai mathématiquement mais qui le sera à notre niveau