Chapitre 1 : Fonctions, deuxième partie

Julien Reichert

2 Fonctions de référence

2.1 Fonction carré

La fonction carré $x \mapsto x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est décroissante jusqu'en 0, où elle atteint son minimum 0, puis croissante. Ainsi, un carré est toujours positif.

Conséquence : Pour x, y deux réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$, on a $x^2 \leqslant y^2$, et pour x, y deux réels strictement négatifs tels que $x \leqslant y$, on a en revanche $x^2 \geqslant y^2$.
En revanche, si $x \leqslant y$ mais que x et y ne sont pas de même signe, on ne peut pas comparer x^2 et y^2, à plus forte raison dans le cas général où on n'a aucune indication sur le signe de x et y.

Le tableau de variations de la fonction carré est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.2 Fonction inverse

La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Elle est décroissante jusqu'en 0, où elle n'est pas définie, puis encore décroissante. Le signe de $\frac{1}{x}$ est celui de x, et tout réel non nul est l'inverse d'un autre.

Conséquence : Pour x, y deux réels de même signe tels que $x \leqslant y$, on a $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$.
Si $x \leqslant y$ mais que x et y ne sont pas de même signe, c'est donc que x est négatif et y positif. Alors $\frac{1}{x}$ est forcément inférieur à $\frac{1}{y}$.
En revanche, dans le cas général, il est impossible de comparer $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ quand $x \leqslant y$ sans précision sur le signe.

Le tableau de variations de la fonction inverse est :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

2.3 Fonctions affines

Une fonction affine est de la forme $x \mapsto a\,x + b$ pour $a, b \in \mathbb{R}$ et définie sur $\mathbb{R}$.

Si $a > 0$, alors la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$, si $a < 0$, elle est décroissante sur $\mathbb{R}$ et si $a = 0$, la fonction est constante. Une fonction affine non constante s'annule en $-\frac{b}{a}$, ce qui permet de déduire les tableaux de signes.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$a\,x+b, a>0$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$a\,x+b, a<0$		$+$	0	$-$	

La courbe de toute fonction affine est une droite, horizontale quand la fonction est constante.
L'ordonnée de l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées est b et l'abscisse de l'intersection de la droite avec l'axe des abscisses est $-\frac{b}{a}$ quand $a \neq 0$.
Une fonction affine telle que $b=0$ est dite linéaire. Sa courbe passe alors par l'origine.

Proposition
Si le point (x,y) est sur la courbe de la fonction f, c'est que $f(x)=y$.

Pour trouver l'expression d'une fonction affine à partir de deux points (x_1,y_1) et (x_2,y_2) (où $x_1 \neq x_2$) de la droite, on écrit donc que $f(x_1)=y_1$, soit $a\,x_1+b=y_1$, et $f(x_2)=y_2$, soit $a\,x_2+b=y_2$.
En faisant la différence de ces deux égalités, on obtient $(a\,x_1+b)-(a\,x_2+b)=y_1-y_2$, soit $a\,x_1-a\,x_2=y_1-y_2$, et en factorisant par a, on trouve $a(x_1-x_2)=y_1-y_2$, soit

$$a=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

Remarque : Cette expression peut être utilisée à tout moment sans justification. On retiendra que a est le rapport entre un écart en ordonnée et un écart en abscisse.

Une fois a trouvé, on pourra calculer b à partir d'une équation au choix parmi $a\,x_1+b=y_1$ et $a\,x_2+b=y_2$.

3 Étude de fonctions

3.1 Fonctions polynomiales de degré 2

Une fonction polynomiale de degré 2 est une fonction $f(x)=ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels. Elle peut aussi s'écrire sous forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, où α et β sont aussi des réels. On remarque que $f(\alpha)=\beta$.

La courbe d'une fonction polynomiale de degré 2 est une parabole. Cette courbe caractéristique possède deux branches partant vers le même infini, ainsi qu'un sommet, le point de coordonnées $(\alpha;\beta)$ et un axe de symétrie, la droite verticale des points d'abscisse α. Une conséquence de la symétrie est que si deux réels x et x' ont la même image par une fonction polynomiale de degré 2, alors la valeur de α est la moyenne de x et x', soit $\frac{x+x'}{2}$.

Pour passer de la forme canonique de l'expression d'une fonction polynomiale de degré 2 à sa forme usuelle, il suffit de développer. L'autre passage n'est pas exigible.

La lecture d'une courbe permet donc de retrouver α et β en repérant le sommet de la parabole. Ensuite, on calcule a en résolvant l'équation associée à n'importe quel autre point de la courbe, en rappelant que si le point $(x;y)$ est sur la courbe de f, alors $f(x)=y$. Puisque seul a reste inconnu, on le trouve ainsi. En particulier, a vaut la différence en ordonnée entre les points d'abscisses α et $\alpha+1$ (ou entre α et $\alpha-1$), ce qui se remarque en écrivant $f(\alpha)-f(\alpha-1)$.

Le tableau de variations d'une fonction polynomiale f de degré 2 dépend du signe de a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x), a>0$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x), a<0$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$

3.2 Fonctions homographiques

Une fonction homographique est une fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, où a, b, c et d sont des réels. Elle peut aussi s'écrire sous forme canonique $\frac{\gamma}{x-\alpha} + \beta$, où α, β et γ sont aussi des réels.

Une fonction homographique est définie pour tous les réels, sauf celui qui annule le dénominateur, donc $-\frac{d}{c}$. Sa courbe est une hyperbole, une courbe qui possède deux branches discontinues de part et d'autre de la droite verticale correspondant aux abscisses $-\frac{d}{c}$, ainsi que de part et d'autre de la droite horizontale correspondant aux ordonnées $\frac{a}{c}$. L'intersection des deux droites mentionnées est un centre de symétrie de l'hyperbole, et les deux bissectrices des droites sont des axes de symétrie.

Pour passer de la forme canonique de l'expression d'une fonction homographique à sa forme usuelle, il suffit de mettre au même dénominateur. L'autre passage n'est pas exigible.

Les informations ci-dessus permettent de reconnaître une courbe correspondant à une fonction donnée parmi plusieurs choix.

Le tableau de variations d'une fonction homographique f dépend du signe du réel $ad - bc$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x), ad-bc>0$	$\frac{a}{c}$	$\nearrow$	$+\infty \,\Vert\, -\infty$	$\nearrow$	$\frac{a}{c}$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x), ad-bc<0$	$\frac{a}{c}$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$\frac{a}{c}$