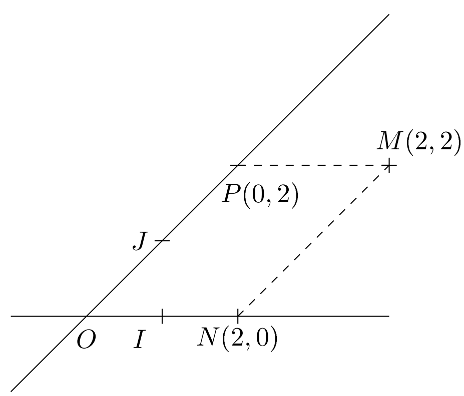
Chapitre 5 : Géométrie

Julien Reichert

1 Géométrie dans le plan

Les notions d'abscisse et d'ordonnée, avec lesquelles un élève sortant de collège est plus ou moins familier, sont intimement liées à celle de repère. Un repère dans un plan peut avoir de nombreuses caractérisations, voire définitions, équivalentes. Nous nous contenteront de dire qu'il s'agit de la donnée d'une origine (toujours notée O ou 0, pour ainsi dire), d'un point I (nom presque systématique, au point que changer de nom nécessite de le signaler expressément) distinct de O et d'un point J qui n'est pas sur la droite (OI). La droite (OI) définit les abscisses et la droite (OJ) définit les ordonnées dans le repère noté $(O; I, J)$, dans la mesure où l'abscisse d'un point quelconque M correspond au rapport $\frac{ON}{OI}$, où N l'unique point de (OI) tel que (OJ) et (MN) soient parallèles, et l'ordonnée de M correspond au rapport $\frac{OP}{OJ}$, où P l'unique point de (OJ) tel que (OI) et (MP) soient parallèles.



Remarque : $ONMP$ est un parallélogramme.

Les repères les plus fréquemment utilisés sont cependant orthogonaux, c'est-à-dire que les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires, voire orthonormés, c'est-à-dire que de plus les distances OI et OJ sont égales.

Déterminer les coordonnées d'un point dans un repère se fait donc par lecture graphique en suivant les projections parallèles aux axes[1].

Les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes arithmétiques des coordonnées respectives des extrémités du segment. En clair, si A a pour coordonnées (x_A, y_A) et B a pour coordonnées (x_B, y_B), alors le milieu de $[AB]$ aura pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2})$. On peut déduire de cette formule une équation permettant d'obtenir le symétrique d'un point par rapport à un autre : si B est le symétrique de A par rapport à S, alors S est le milieu de $[AB]$.

La distance entre deux points, qui n'a de sens que **si on considère un repère orthonormé** (afin d'avoir une unité pour la mesure), s'obtient par le théorème de Pythagore, et avec les mêmes notations on a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

1. et non pas perpendiculaires

2 Géométrie dans l'espace

La géométrie dans l'espace est abordée en classe de seconde sous trois points de vue : les solides et leur volume, le dessin en perspective, les positions relatives d'objets de l'espace. Il n'est pas prévu d'aborder une extension à la troisième dimension des formules de géométrie dans le plan, bien que cette extension soit très intuitive.

2.1 Solides de l'espace

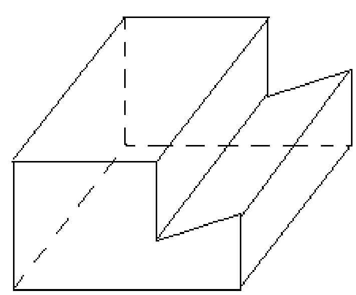
La connaissance de ces solides semblant ancrée dans la culture générale, l'auteur de ces notes de cours a voulu s'épargner la tâche fastidieuse de représenter les solides principaux et de donner leur nombre de faces, d'arêtes et de sommets ainsi que leur volume.

Les seules formules difficiles à mémoriser sont le volume d'une boule [2] de rayon r : $\frac{4}{3}\pi r^3$ ainsi que celui d'un cône ou d'une pyramide, qui sont le tiers du produit de l'aire de la base par la hauteur [3], soit $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ pour un cône de rayon r et de hauteur h, $\frac{1}{3}\pi c^2 h$ pour une pyramide régulière à base carrée, et $\frac{\sqrt{2}}{12}c^3$ pour une pyramide régulière à base triangulaire dont toutes les arêtes sont de même longueur (ce qu'on appelle un tétraèdre).

2.2 Perspective

La représentation sur une feuille de papier, un tableau ou toute autre surface plane d'objets en trois dimensions ne peut se faire en respectant toutes les mesures et tous les angles. La perspective cavalière est la méthode de représentation la plus fréquente, elle permet de se faire une bonne idée de la forme d'un solide.

Les règles de la perspective cavalière sont les suivantes : il faut respecter le parallélisme entre les droites (mais il n'est pas possible de conserver les autres angles, même droits), ainsi que les rapports de longueurs entre des droites parallèles ; de plus, les milieux des segments, s'ils sont mis en valeur dans l'objet réel, doivent correspondre aux milieux des mêmes segments en perspective cavalière ; enfin, les lignes tracées en entier correspond aux segments visibles, et des arêtes cachées, si elles sont représentées, le sont en pointillés.



Exemple de solide en perspective cavalière.

2. une sphère étant la surface d'une boule, cette surface vaut d'ailleurs $4\pi r^2$
3. un bon moyen mnémotechnique qui marche pour tout solide ayant un « sommet du haut » et une forme bien régulière

2.3 Objets de l'espace

Dans l'espace, de dimension 3, les objets principaux étudiés sont les plans (dimension 2), les droites (dimension 1) et les points (dimension 0). Une droite de l'espace est totalement caractérisée par deux de ses points distincts, un plan de l'espace est totalement caractérisé au choix par :
- Trois points non alignés.
- Une droite et un point hors de la droite.
- Deux droites sécantes non confondues.
- Deux droites parallèles non confondues.

Dans tous les plans de l'espace, ce qui a été vu dans la partie concernant la géométrie dans le plan reste vrai. En particulier, on peut utiliser le théorème de Pythagore plusieurs fois de suite dans des plans différents, en se donnant une unité de longueur universelle.

Les intersections possibles entre des objets de l'espace étudiés sont (liste exhaustive) :
- Entre deux points : s'ils sont distincts, l'ensemble vide ; sinon le point, qui est commun.
- Entre une droite et un point : si le point est sur la droite, le point lui-même ; sinon l'ensemble vide.
- Entre deux droites : si elles sont confondues, la droite commune ; sinon si elles sont sécantes, un point ; sinon l'ensemble vide, auquel cas les droites sont soit parallèles soit elles sont dites non coplanaires car il n'existe aucun plan qui les contienne toutes les deux.
- Entre un plan et un point : si le point est dans le plan, le point lui-même ; sinon l'ensemble vide.
- Entre un plan et une droite : si la droite est dans le plan, la droite elle-même ; sinon si la droite est sécante au plan (donc à au moins une droite du plan), un point ; sinon l'ensemble vide, auquel cas la droite est parallèle au plan (donc à au moins une droite du plan).
- Entre deux plans : si les plans sont parallèles, l'ensemble vide ; sinon une droite.

Théorème
Deux plans sont parallèles si, et seulement si, on peut trouver deux droites sécantes (d_1) et (d_2) dans le premier plan et deux droites sécantes (d'_1) et (d'_2) dans le deuxième plan telles que $(d_1)\ //\ (d'_1)$ et $(d_2)\ //\ (d'_2)$.

Théorème
Si deux plans (P) et (P') sont parallèles et sécants à un troisième plan (P''), l'intersection de (P) et (P'') et l'intersection de (P') et (P'') sont des droites parallèles.

3 Droites dans le plan

Ce sous-chapitre consiste essentiellement en une vision géométrique du cours sur les fonctions affines. Les rappels seront en quelque sorte des reformulations.

Définition
L'équation d'un objet du plan est une équation d'inconnues l'abscisse x et l'ordonnée y [4] telle que l'ensemble des points dont les coordonnées x et y vérifient l'équation est exactement l'objet en question.

Nous nous limitons ici aux équations de droites, en faisant toutefois remarquer qu'il est parfois nécessaire d'utiliser un système d'équations [5] voire des combinaisons d'inéquations plutôt qu'une seule équation pour définir certains objets du plan. Par exemple, un carré plein centré en O et de côté 2 est caractérisé par $(-1 \leqslant x \leqslant 1 \text{ ET } -1 \leqslant y \leqslant 1)$.

Tous les résultats de ce sous-chapitre nécessitent qu'il existe un repère du plan, mais rien n'impose que ce repère soit orthonormé, ni même orthogonal.

4. ces inconnues n'étant pas obligatoirement présentes dans toutes les équations
5. typiquement, pour définir un point du plan, on a besoin de deux équations du premier degré, ou on peut tricher en assimilant un point M en un cercle de rayon 0 centré en M

Toute droite du plan est soit parallèle à l'axe des ordonnées, soit sécante à cet axe. Dans le premier cas, les points de la droite en question ont tous une même abscisse, notée c, et l'équation de la droite est alors $x = c$. Dans le deuxième cas, la droite est la courbe d'une fonction affine notée $f(x) = ax + b$, et l'équation de la droite est alors $y = ax + b$, puisque les points de la courbe de la fonction f sont exactement les points de coordonnées $(x, f(x))$, donc ceux dont l'ordonnée y vaut $f(x)$. Le nombre a est le coefficient directeur de la droite, c'est-à-dire le rapport entre l'écart en ordonnées (« de bas en haut »[6]) et l'écart en abscisses (« de gauche à droite »[7]) de deux points quelconques de la droite ; lorsque ce nombre est 0, la droite est parallèle à l'axe des abscisses et la fonction est constante. Le nombre b est l'ordonnée à l'origine de la droite, c'est-à-dire l'ordonnée de l'unique point de la droite dont l'abscisse est 0 ; lorsque ce nombre est 0, la droite passe par l'origine et la fonction est linéaire.

Il est possible de fusionner les deux définitions en disant que toute droite du plan a une équation de la forme $ax + by + c = 0$, mais cette forme n'apporte rien au lycée. On lui préfère la forme dite réduite citée dans le paragraphe précédent.

Théorème
Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont toutes deux parallèles à l'axe des ordonnées ou toutes deux sécantes à l'axe des ordonnées en ayant le même coefficient directeur.

Remarque : Deux droites du plan sont confondues si, et seulement si, leurs équations sont équivalentes.

Deux droites non parallèles du plan sont nécessairement sécantes en un unique point. Comme le point doit être à la fois sur une droite et sur l'autre, il vérifie à la fois les deux équations des droites, dont le système composé par ces deux équations. Résoudre le système en question donnera donc les coordonnées du point d'intersection.

Théorème
Trois points A, B et C du plan sont alignés si, et seulement si, l'une des conditions suivantes (qui sont équivalentes) est vérifiée :
- Les droites (AB) et (AC) sont parallèles[8].
- Si deux points ont la même abscisse, le troisième a aussi la même abscisse ; si les trois points ont des abscisses différentes, les coefficients directeurs des droites (AB) et (AC) sont les mêmes.

Des conditions seront ajoutées dans le sous-chapitre suivant.

4 Vecteurs

Jusqu'ici, les objets géométriques vus en cours étaient fixes ; le nouvel objet introduit dans ce sous-chapitre n'a, quant à lui, pas de localisation précise : plutôt que d'avoir une position, il exprime un déplacement.

Un vecteur se caractérise par une direction, qui est une droite, un sens, et une longueur. Il se représente comme un segment dont la longueur est celle du vecteur, avec une flèche à l'un des bouts, afin de matérialiser le sens.

La notion de vecteur est intimement liée à celle de translation. Une translation est une transformation du plan qui consiste à glisser tout un objet « de la même façon » : la translation qui transforme le point A en le point B associe à tout point C un point D de sorte que $ABDC$ soit un parallélogramme, c'est-à-dire que le fait d'aller de A à B et le fait d'aller de C à D reviennent au même déplacement. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représente précisément le déplacement effectué. Le sens étant de A vers B, la représentation du vecteur est donc le segment $[AB]$ avec une flèche au niveau de B.

Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{0}$, représente un déplacement nul, donc une translation qui ne fait rien. La direction du vecteur nul est indéfinie, de même que son sens, mais le vecteur nul est le seul vecteur de longueur 0.

6. rigoureusement : dans la direction de O à J quel que soit la forme du repère
7. rigoureusement : dans la direction de O à I quel que soit la forme du repère
8. on peut remplacer par (BC) n'importe laquelle de ces droites dans la condition

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont même direction, même sens et même longueur, quel que soit l'endroit où ils sont dessinés. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, la translation qui transforme A en B transforme aussi C en D, donc si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

Dans un repère quelconque du plan [9], un vecteur $\overrightarrow{AB}$ dispose de coordonnées, qui sont $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ avec les notations intuitives. Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs coordonnées sont égales.

Il est possible d'additionner deux vecteurs, et cette addition peut se faire dans n'importe quel ordre. Cela revient à placer l'origine d'un des vecteurs à l'extrémité de l'autre, afin d'obtenir un vecteur qui combine les deux déplacements sans tenir compte de la position intermédiaire. Ainsi, la somme du vecteur $\overrightarrow{u}$, de coordonnées $(x_1 ; y_1)$, et du vecteur $\overrightarrow{v}$, de coordonnées $(x_2 ; y_2)$, est un vecteur de coordonnées $(x_1 + y_1 ; x_2 + y_2)$.

Théorème
La somme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du vecteur $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Remarque : Cette propriété est appelée la relation de Chasles, et elle nécessite que le point B soit commun aux deux vecteurs et apparaisse à l'extrémité de l'un et à l'origine de l'autre.

Il est possible de multiplier un vecteur par un nombre réel, mais dans ce cas la notation imposée est $k\overrightarrow{AB}$. On écrira en particulier $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et non pas $\frac{\overrightarrow{AB}}{2}$. Surtout, il ne faut pas faire de division entre vecteurs : on écrira $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ mais jamais $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = 2$.

Le produit d'un vecteur de coordonnées $(x ; y)$ par le réel k est un vecteur de coordonnées $(kx ; ky)$.

Théorème
Le milieu d'un segment $[AB]$ est l'unique point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsque leurs directions sont des droites parallèles [10]. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur, et deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$, donc si, et seulement si, les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ sont proportionnelles.

Remarque : Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées de deux vecteurs. Ces coordonnées sont proportionnelles si, et seulement si, $x_1 y_2 = x_2 y_1$. Il s'agit d'un produit en croix qui facilite entre autres la résolution d'équations déterminant si deux vecteurs sont colinéaires, mais qui ne permet pas de trouver directement le coefficient k dans ce cas.

Théorème
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Théorème
Trois points A, B et C sont alignés si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

9. qui peut d'ailleurs aussi être défini par le point O et les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$
10. le fait de dire que des vecteurs sont parallèles est un abus de langage