

# Résumé du cours de mathématiques de Seconde

Julien REICHERT

## 1 Fonctions

### 1.1 Introduction

La courbe d'une fonction est l'ensemble des points de coordonnées  $(x; f(x))$  pour  $x$  dans l'ensemble de définition de  $f$ . Ainsi, **si un point  $(x; y)$  est sur la courbe de  $f$ , c'est que  $f(x) = y$ .**

À partir d'une courbe, on peut résumer l'allure d'une fonction dans un tableau de signes ou de variations, suivant l'usage ultérieur.

### 1.2 Fonctions de référence

Les fonctions carré et inverse ont pour courbe respectivement une parabole et une hyperbole.

Les fonctions affines ont pour courbe une droite non verticale. Dans l'expression  $f(x) = ax + b$ ,  $a$  est le coefficient directeur de la droite (la courbe sera croissante si  $a > 0$  et décroissante si  $a < 0$ ) et  $b$  est l'ordonnée à l'origine. Si  $a \neq 0$ , donc la fonction n'est pas constante, la courbe coupe l'axe des abscisses à l'abscisse  $-\frac{b}{a}$ .

### 1.3 Étude de fonctions

Les tableaux de signes des fonctions polynomiales et rationnelles, écrites comme produits et quotients de fonctions affines, s'obtiennent par la règle du signe du produit à partir des fonctions (d'ordinaire affines ou de signe constant) qui la composent.

Toute fonction polynomiale de degré 2 peut s'écrire sous une forme dite canonique  $a(x - \alpha)^2 + \beta$ . Graphiquement, le point de coordonnées  $(\alpha; \beta)$  est le sommet de la parabole, là où la fonction atteint son extremum.

## 2 Équations

### 2.1 Introduction

Une équation implique toujours une égalité. Toute transformation appliquée à un membre doit être appliquée à l'autre, et il faut prendre garde à ce que la transformation ne crée ni ne supprime des solutions à l'équation, d'où l'intérêt de se limiter par prudence à l'addition de réels ou la multiplication par des réels non nuls.

### 2.2 Résolution d'équations

En seconde, en-dehors de la résolution graphique, les seules méthodes à disposition pour résoudre une équation du second degré sont la détection et la factorisation d'identités remarquables  $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ ,  $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$  et  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ; la détection de factorisations bien visibles avec un facteur commun mis en évidence; la factorisation suggérée avec vérification par développement.

Dans tous les cas, on utilise la propriété qu'un produit est nul si, et seulement si, l'un de ses facteurs est nul.

### 2.3 Résolution d'inéquations

La résolution graphique d'une inéquation consiste à situer une courbe par rapport à une autre, cette autre pouvant être une ligne horizontale figurant une certaine ordonnée.

Résoudre algébriquement une inéquation, c'est d'abord détecter les valeurs pour lesquelles l'équation est vérifiée. À ce moment-là, les solutions à une inéquation forment une réunion d'intervalles, éventuellement calculable en faisant un tableau de signes.

## 3 Trigonométrie

Le cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1 centré en l'origine d'un repère orthonormé.

Lorsqu'on enroule un segment de la droite verticale passant par les points d'ordonnée 1 autour du cercle trigonométrique, la distance parcourue sur le cercle correspond à la mesure en radians de l'angle  $\widehat{IOM}$ , où  $M$  est le point d'arrivée à la fin du parcours. On mesure positivement la distance lorsqu'elle est parcourue dans le sens direct (ou trigonométrique) qui est le sens inverse des aiguilles d'une montre, et on mesure négativement la distance lorsqu'elle est parcourue dans le sens indirect (ou antitrigonométrique) qui est le sens des aiguilles d'une montre.

Les angles sont définis à  $360^\circ$  près, soit à  $2\pi$  radians près. On préfère donc travailler avec des angles dont la mesure en degrés est dans l'intervalle  $] - 180; 180]$ .

Les coordonnées d'un point  $M$  du cercle tel que l'angle  $\widehat{IOM}$  soit de mesure  $\theta$  sont  $(\cos \theta, \sin \theta)$ .

D'après le théorème de Pythagore et les définitions de collège du cosinus et du sinus, on obtient pour tout angle  $\theta$  la formule  $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ .

Les valeurs des cosinus et sinus d'angles particuliers sont à connaître et se retrouvent par le théorème de Pythagore sur des triangles adéquats. On en déduit les valeurs des cosinus et sinus d'autres angles en-dehors de l'intervalle en degrés  $[0; 90]$  par des formules telles que  $\cos(-\theta) = -\cos \theta$ , etc.

## 4 Statistiques et probabilités

Pour un caractère qualitatif, seuls la fréquence et l'effectif de chaque valeur a un intérêt. Pour un caractère quantitatif, on ajoute fréquence et effectif cumulés croissants, de même que de nombreuses autres notions, notamment la médiane (terme du milieu si le nombre de termes est impair, moyenne des deux termes du milieu sinon), le premier et le troisième quartile (plus petits termes de la série tels que respectivement le quart et trois quarts des valeurs leur soient inférieures), et la moyenne (somme des valeurs pondérées par les effectifs correspondants, le tout divisé par l'effectif total).

Dans la section probabilités, c'est essentiellement le vocabulaire qui est à retenir, en plus des deux formules les plus usuelles :

En situation d'équiprobabilité,  $p(A) = \frac{\text{nombre d'issues réalisant } A}{\text{nombre total d'issues}}$ .

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

## 5 Géométrie

### 5.1 Géométrie dans le plan

Les repères de toutes natures sont à maîtriser, notamment en ce qui concerne le placement de points ou inversement la lecture des coordonnées.

Dans un repère quelconque, les coordonnées du milieu de deux points sont les moyennes des coordonnées respectives des points.

Dans un repère orthonormé (afin que la notion de distance ait un sens), la distance entre deux points s'obtient par le théorème de Pythagore, dans un triangle rectangle (éventuellement plat. . .) dont l'hypoténuse est le segment formé par les deux points et les deux autres côtés ont pour longueurs les écarts en ordonnée et en abscisse entre les deux points.

### 5.2 Géométrie dans l'espace

Les solides usuels ont tous un volume qui se calcule avec une formule de la forme coefficient  $\times$  aire de la base  $\times$  hauteur. Le coefficient, pour la mémoire, est de 1 si les faces supérieure et inférieure sont identiques (cube, pavé droit, prisme posé sur une face rectangulaire, cylindre),  $\frac{1}{2}$  si le solide a une arête en guise de face supérieure (prisme dans sa représentation usuelle),  $\frac{1}{3}$  si le solide a un sommet en guise de face inférieure (pyramide, tétraèdre, cône). Exception : la boule a pour volume  $\frac{4}{3}\pi \times \text{rayon}^3$ .

La perspective cavalière est un moyen de représentation intuitif d'une figure géométrique dans l'espace. Ses règles se déduisent par l'exemple.

Dans l'espace, de nombreuses notions du plan doivent être adaptées, voire disparaissent. Par exemple, deux droites ne sont plus nécessairement parallèles ou sécantes : un troisième cas possible apparaît, à savoir que les droites sont non coplanaires.

Deux points non confondus définissent une droite, trois points non alignés définissent un plan. Deux des trois points définissant une droite, on peut en déduire qu'une droite et un point hors de la droite définissent un plan. En fait, il s'agit de jongler avec ce genre de notions et de se représenter les entités géométriques les yeux fermés, notamment lorsqu'il est question de déterminer des intersections.

### 5.3 Droites dans le plan

Il s'agit d'une vue alternative sur les fonctions affines, en ajoutant les droites parallèles à l'axe des ordonnées (donc verticales dans la plupart des repères) à l'étude. L'équation d'une droite est une équation vérifiée par les coordonnées des points de la droite et seulement par eux.

Un système d'équations de droites a pour solution, s'il y en a, l'intersection des droites dont les équations sont données.

Il est aussi possible de déterminer l'intersection de deux droites à partir de leur coefficient directeur, car deux droites du plan sont soit parallèles (éventuellement confondues) soit sécantes.

### 5.4 Vecteurs

Un vecteur, au contraire de points, de droites, de figures et d'autres éléments géométriques, ne se caractérise pas par une position, mais représente un déplacement. Les vecteurs définissent alors des translations, qui sont des transformations qui consistent à déplacer un point, une figure, etc. sans le tourner ni changer sa forme ni sa taille.

Le vecteur représentant le déplacement d'un point  $A$  à un point  $B$  s'écrit  $\overrightarrow{AB}$ . Il est caractérisé par sa direction : la droite  $(AB)$ , son sens : de  $A$  vers  $B$ , et sa longueur : la distance  $AB$ . Deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux si, et seulement si,  $ABDC$  est un parallélogramme.

Les vecteurs peuvent être additionnés (et l'ordre dans lequel les additions sont faites n'importe pas). On peut utiliser la relation de Chasles :  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

Dans un repère, les coordonnées d'un vecteur s'obtiennent en soustrayant terme à terme les coordonnées de l'extrémité et les coordonnées de l'origine. On peut également multiplier un vecteur par un réel en appliquant la multiplication en question à chacune des coordonnées.

Deux vecteurs sont dits colinéaires lorsque l'un au moins est nul ou lorsque l'un est le produit de l'autre par un certain réel non nul. Cette caractérisation équivaut au fait que les directions des vecteurs sont des droites parallèles ou confondues.