Chapitre 3 : Trigonométrie

Julien Reichert

Dans ce chapitre, des notions de géométries vues en seconde sont utilisées, et donc considérées comme admises. Les théorèmes de Thalès et surtout de Pythagore sont aussi des prérequis, de même que la somme des angles d'un triangle.

Définition (ou rappel)
Soit un triangle ABC rectangle en A, on note θ l'angle $\widehat{ABC}$. Le cosinus de θ, noté $\cos\theta$, est le rapport entre la longueur du côté adjacent à l'angle θ et la longueur de l'hypoténuse, donc $\frac{AB}{BC}$. Le sinus de θ, noté $\sin\theta$, est de manière analogue le rapport « opposé sur hypoténuse », donc $\frac{AC}{BC}$. La tangente de θ, notée $\tan\theta$, est de manière analogue le rapport « opposé sur adjacent », donc $\frac{AB}{AC}$. Les parenthèses sont optionnelles quand il n'y a pas d'ambigüité possible.

Conséquence immédiate : pout tout angle θ, on a $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

Dans un triangle rectangle sans angle plat, le cosinus et le sinus des angles non droits sont strictement compris entre 0 et 1. En fait, la notion de cosinus, de sinus et de tangente s'étend à des angles de n'importe quelle mesure, et dans ce cas un cosinus et un sinus peuvent devenir négatifs, sachant que la valeur reste dans l'intervalle, cette fois fermé, $[-1;1]$. Cette extension sera présentée au moment d'étudier le cercle trigonométrique.

Dans le triangle rectangle de la définition, si on note θ' l'angle opposé à θ, on a $\theta' = 90 - \theta$ en degrés[1]. Le côté adjacent à un de ces angles est le côté opposé à l'autre, ce qui permet de déduire que $\cos(90-\theta) = \sin\theta$ et que $\sin(90-\theta) = \cos\theta$, d'où $\tan(90-\theta) = \frac{1}{\tan\theta}$, cette dernière formule excluant que $\tan\theta = 0$.

Proposition
Soit θ un angle quelconque. On a la relation $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$.

Cette relation se prouve aisément dans un triangle rectangle, car elle découle du théorème de Pythagore : on écrit la formule donnée par le théorème et on divise à gauche et à droite par le carré de l'hypoténuse.

Définition
Soit $(O; I, J)$ un repère orthonormé du plan. Le cercle trigonométrique est un cercle centré en O et de rayon 1, donc passant par les points I et J.

Ce cercle sert de base aux calculs en trigonométrie. On le représente souvent avec la droite verticale passant par I, donc tangente au cercle en I.

On appelle sens direct[2] le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les angles sont mesurés dans le sens direct, l'angle plat partant de I en direction de J (et au-delà pour les angles de plus de 90 degrés). Après un tour complet (donc de 360 degrés), on retombe sur le point I, les angles sont donc définis à 360 degrés près. Conventionnellement, à partir du lycée, on utilise plutôt des angles entre -180 (exclu) et 180 (inclus) degrés.

1. Par convention, on se permet de ne pas écrire le symbole $^\circ$, le contexte étant usuellement clair. En fait, il est recommandé d'utiliser les radians avec des fractions explicites de π et seulement dans ce cas.
2. ou trigonométrique

Soit θ un angle entre 0 et 180 degrés. On construit le point M sur le cercle trigonométrique de sorte que l'angle $\widehat{IOM}$ soit de θ et que M soit au-dessus de l'axe des abscisses. La mesure de θ en radians est la longueur de l'arc de cercle partant de I et parcourant le cercle trigonométrique dans le sens direct jusqu'à M. D'après la formule du périmètre d'un cercle et par proportionnalité, on passe alors d'une mesure en degrés à une mesure en radians en divisant par 360 et en multipliant par 2π. En multipliant par l'inverse, on passe donc d'une mesure en radians à une mesure en degrés.

La mesure en radians s'étend aux angles entre -180 degrés (exclu) à 0 degrés. La formule demeure et la mesure en radians sera négative (on peut aussi donner une mesure positive en ajoutant 2π, mais elle ne sera pas privilégiée). Pour obtenir manuellement cette mesure, on dit qu'on enroule la demi-droite verticale partant de I vers le haut sur le cercle trigonométrique jusqu'à M, sur une longueur qui est donc la mesure en radians. Il est naturellement possible d'enrouler la demi-droite verticale partant de I vers le bas et d'obtenir une mesure négative. En fait, chaque point de toute la droite verticale peut être projetée sur le cercle, la projection n'étant alors pas unique (un espacement de 2π conduit par exemple à la même projection.

Proposition
Soit M un point du cercle trigonométrique, tel que l'angle $\widehat{IOM}$, déterminé comme ci-dessus, donc avec un signe, vaille θ. Les coordonnées de M dans le repère $(O; I, J)$ sont $(\cos\theta, \sin\theta)$.

On considère le point N comme le point de l'axe des abscisses ayant la même abscisse que M. Le triangle ONM est alors rectangle en N, et son hypoténuse est le rayon du cercle trigonométrique, donc 1. Alors le cosinus de θ est par définition le rapport $\frac{ON}{OM}$, donc ON, qui est l'abscisse de M, et le sinus de θ est de manière analogue le rapport $\frac{MN}{OM}$, donc MN, qui est l'ordonnée de M.

Proposition
Soit M un point du cercle trigonométrique, tel que l'angle $\widehat{IOM}$, déterminé comme ci-dessus, donc avec un signe, vaille θ. La tangente de θ est l'ordonnée de l'intersection de OM avec la droite verticale passant par I.

Cette proposition se prouve à l'aide du théorème de Thalès : on note encore une fois N le point $(\cos\theta, 0)$ et on appelle P l'intersection en question. Comme MN et IP sont parallèles, on a $\frac{MN}{IP} = \frac{ON}{OI}$, donc $\frac{MN}{ON} = \frac{IP}{OI}$ en permutant les fractions[3]. Or $\frac{MN}{ON}$ est la tangente de θ, $OI = 1$ et IP est l'ordonnée du point P, CQFD.

Les valeurs remarquables des cosinus, sinus et tangentes des angles entre 0 et 90 degrés sont données dans ce tableau. Le moyen mnémotechnique est de voir ces valeurs comme les racines carrées des nombres $\frac{0}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ et $\frac{4}{4}$.

Angle en degrés	0	30	45	60	90
Angle en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Indéfini

De nombreuses formules données dans les années à venir permettent de déduire les valeurs pour les angles remarquables hors de l'intervalle en degrés $[0; 90]$ de différentes façons. Par lecture graphique, on peut néanmoins d'ores et déjà dire que le cosinus d'un angle dans $[-90; 90]$ est positif mais le cosinus d'un angle dans $[90; 180]$ ou dans $]-180; -90]$ est négatif, et le sinus d'un angle dans $[0; 180]$ est positif mais le sinus d'un angle dans $]-180; 0]$ est négatif. En outre, le cosinus de l'opposé d'un angle est le cosinus de l'angle, mais le sinus de l'opposé d'un angle est l'opposé du cosinus de l'angle.

3. si cette méthode pose problème, il s'agit d'une transformation court-circuitant le produit en croix