Révisions sur les équations

Julien Reichert

9 septembre 2014

Rappels

Équation : égalité faisant intervenir une (ou plusieurs) inconnue(s).

Exemple : 2x + 4 = 9.

Résoudre une équation : Déterminer les valeurs (potentiellement aucune, une, plusieurs, une infinité) telles que l'égalité soit vérifiée si l'inconnue prend une telle valeur. S'il y a plusieurs inconnues, il s'agit de déterminer les couples, triplets, quadruplets, etc. de valeurs telles que l'égalité soit vérifiée si le couple, triplet, quadruplet, etc. d'inconnues prend les valeurs respectives.

Degré d'une équation à une inconnue : Exposant maximal de l'inconnue, s'il n'y a pas de dénominateur.

Propriétés fondamentales

L'ensemble des solutions ne change pas si on multiplie à gauche et à droite par le même réel **non nul**, ainsi que si on ajoute à gauche et à droite le même réel.[1]

Cela vaut également si l'inconnue est impliquée. Ainsi, on peut ajouter 2x à gauche et à droite, et on peut multiplier ou diviser par x **sous réserve d'exclure la valeur 0 de l'ensemble des solutions**.

Bien entendu, transformer par factorisation ou développement est toujours possible.

Enfin, pour rappel, un produit est nul si, et seulement si, au moins l'un des facteurs est nul.

Résoudre une équation à une inconnue

Cas typique : $f(x) = 0$, où f est une fonction polynomiale.

Degré 1 exactement : On applique des transformations selon les propriétés fondamentales. Il existe toujours une unique solution.

Degré 2 exactement : Méthode du discriminant. Il existe entre aucune et deux solutions.

Degré supérieur : Il faut trouver une astuce[2]. Tester les valeurs de x entre -2 et 2, éventuellement faire un changement de variable.

Bon à savoir : si on ne retombe pas sur l'égalité $0 = 0$ pour laquelle tout est solution, le nombre de solutions est inférieur ou égal au degré de l'équation.

1. Plus généralement, si on applique à gauche et à droite la même fonction injective, c'est-à-dire une fonction telle qu'un réel ait au plus un antécédent.
2. ou être à BAC+4 dans la spécialité

Résoudre un système d'équations à plusieurs inconnues

Contexte : m équations, n inconnues $x_1, \ldots, x_n$. D'ordinaire, on a $m = n$.

But : Trouver l'ensemble des n-uplets $(v_1, \ldots, v_n)$ tels que les m équations soient simultanément satisfaites si $x_1 = v_1, \ldots$ et $x_n = v_n$.

En application d'une propriété fondamentale, n'importe quelle équation reste inchangée si on ajoute la même valeur à gauche et à droite. En particulier, on peut ajouter en même temps à gauche de la i-ième équation la partie gauche de la j-ième équation et à droite de la i-ième équation la partie droite de la j-ième équation.

Exemple :

$$\left\{\begin{array}{lll} 2x & +3y & = 14 \\ x & -y & = 2 \end{array}\right.$$

On ajoute trois fois la deuxième équation à la première équation.

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x + 3y + 3 \times (x - y) & = 14 + 3 \times 2 \\ x - y & = 2 \end{array}\right.$$

Et on remplace.

$$\left\{\begin{array}{lll} 5x & +0y & = 20 \\ x & -y & = 2 \end{array}\right.$$

On constate que $x = 4$. On remplace x par 4 dans l'autre équation pour obtenir $y = 2$. L'unique solution pour (x, y) est le couple $(4, 2)$.

Pour le cas général, en application du principe pédagogique que je nommerai désormais ≪ les questions métaphysiques ≫, on se demande où on est : on a m équations. On se demande où on veut aller : déterminer les valeurs de n inconnues. Comment : par exemple en se débrouillant pour qu'une majorité des équations soient réduites à la plus simple des formes : l'inconnue seule à gauche, un réel à droite.

Ceci peut s'effectuer ≪ en escalier ≫, par l'algorithme dit du pivot de Gauss (qui n'est cependant pas assez bien mis en évidence quand il n'y a que deux équations).

Exercices

Déterminer les solutions de l'équation $2x^3 - x^2 + 2x + 5 = 0$.

Déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & +3y & = 16 \\ x & -2y & = 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{llll} 2x & +2y & +4z & = 0 \\ -x & -2y & -z & = 1 \\ x & +y & & = -2 \end{array}\right.$$