Introduction au raisonnement scientifique

Julien Reichert

1 Introduction à la logique propositionnelle

La logique propositionnelle étudie, comme son nom l'indique, des propositions.

À la base de la logique, il y a le vrai et le faux, qui sont ici appelés des booléens, du nom d'un mathématicien qui a travaillé sur les bases de la théorie.

Les propositions étudiées sont forcément vraies ou fausses, éventuellement en fonction de variables dont elles dépendent. Une proposition peut donc être vue comme une fonction qui à un ensemble de variables (elles-mêmes étant des booléens) associe un booléen.

Les opérateurs binaires, au nombre de 16, transforment un couple de booléens $(a; b)$ en un booléen c, suivant l'opérateur. Ils sont listés ici en commençant par les plus basiques. La convention de notation n'est pas toujours universelle, cependant.

— « Vrai », noté V ou $\top$, retourne vrai quoi qu'il arrive. On ne met même pas a et b dans la notation.
— « Faux », noté F ou $\perp$, retourne faux quoi qu'il arrive.
— « Et », noté $a \wedge b$ ou $a.b$, retourne vrai à condition que a et b soient tous les deux vrais. La définition est intuitive.
— « Ou », noté $a \vee b$ ou $a + b$, retourne vrai à condition que a ou b soient vrais (donc également lorsque les deux sont vrais). La définition n'est pas intuitive.
— « Ou exclusif », noté $a \oplus b$ ou a XOR b (entre autres), retourne vrai à condition que a ou b soit vrai, mais pas les deux.
— L'équivalence, notée $a \Leftrightarrow b$ ou $a = b$, retourne vrai à condition que a et b aient la même valeur. C'est le fameux « si et seulement si ».
— L'implication, notée $a \Rightarrow b$, retourne vrai à condition que a implique b, donc si b est vrai...ou si a est faux. D'où des phrases semblant absurdes et valides en logique, comme « Si j'ai une sœur, alors elle est prix Nobel de chimie. »...
— L'implication réciproque, notée $a \Leftarrow b$, ce qui revient à $b \Rightarrow a$, retourne vrai à condition que b implique a.
— « Non et », noté $a \sim b$ ou a NAND b, retourne vrai à condition que a ou b soient faux (donc également lorsque les deux sont faux). Il s'agit du contraire de $a \wedge b$. C'est ce qui est utilisé lorsqu'on vous annonce « fromage ou dessert » en vous interdisant de prendre les deux...
— « Non ou », noté a NOR b (il est rare de voir un symbole pour cet opérateur si rare), retourne vrai à condition que a et b soient faux. Il s'agit du contraire de $a \vee b$.
— La négation de l'implication, retourne vrai à condition que $a \Rightarrow b$ soit faux, donc lorsque a est vrai alors que b est faux.
— La négation de l'implication réciproque, retourne vrai à condition que $b \Rightarrow a$ soit faux, donc lorsque b est vrai alors que a est faux.
— La première composante : on retourne a en ignorant b. Les quatre derniers opérateurs ne sont ordinairement pas utilisés en tant que tels, car comme les deux premiers ils ne tiennent pas compte d'au moins une des variables.
— La deuxième composante : on retourne b en ignorant a.
— La négation de la première composante : on retourne vrai à condition que a soit faux en ignorant b. On note cela $\neg a$ ou $\bar{a}$ (comme en probabilités).
— La négation de la deuxième composante : on retourne vrai à condition que b soit faux en ignorant a.

Parmi ces opérateurs, on accordera une attention toute particulière à l'équivalence, car elle est cachée dans tous les raisonnements, conjointement avec l'implication et l'implication réciproque. On notera d'ailleurs que $a \Leftrightarrow b$ si, et seulement si, on a à la fois $a \Rightarrow b$ et $b \Rightarrow a$.

Écrire des équivalences, donc utiliser le symbole en question, nécessite que lesdites équivalences soient garanties (et prouvées). Fort heureusement, il est rare que ce ne soit pas le cas, et les équivalences sont cachées dans les théorèmes et formules de mathématiques depuis le collège.

Par exemple, un produit est nul **si et seulement si** l'un de ses facteurs est nul. Ceci permet de passer de l'étape $(ax+b)(cx+d) = 0$ d'une équation à l'étape $ax + b = 0$ OU $cx + d = 0$ avec un symbole d'équivalence.

Même les simplifications d'équations de type « on passe le réel de l'autre côté » ne sont permises que par la phrase du cours « L'ensemble des solutions d'une équation ne change pas lorsqu'on additionne un même réel à gauche et à droite. », qui signifie que les deux équations sont équivalentes.

En revanche, le théorème de Pythagore ne donne pas une équivalence : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. Cela signifie qu'on a simplement une implication (le triangle ABC est rectangle en A) $\Rightarrow$ $(AB^2 + AC^2 = BC^2)$. Pour utiliser l'équivalence, il faut invoquer à la fois le théorème de Pythagore et sa réciproque. Pour autant, les raisonnements ne demanderont pas toujours de prouver une équivalence, donc les méthodes de collège ne sont pas remises en cause.

Pour terminer, voici un exemple de raisonnement erroné en raison d'un abus d'équivalence :

$$\begin{array}{crcl} & \sqrt{x} & = & -x \\ \Leftrightarrow & x & = & (-x)^2 \\ \Leftrightarrow & x & = & x^2 \\ \Leftrightarrow & x - x^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x(x-1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 & OU & x - 1 = 0 \end{array}$$

En vérifiant, on constate que 1 n'est pas une solution, car $\sqrt{1} \neq -1$. L'erreur a été de considérer que l'ensemble des solutions restait le même quand on passait le tout au carré, donc que les deux premières équations étaient équivalentes. Or ceci n'est pas une phrase du cours, tout au plus est-elle vraie quand toutes les valeurs possibles pour x sont de même signe. Le réel ensemble des solutions à cette équation est $\{0\}$. Il s'obtient en faisant le raisonnement suivant :

$$\begin{array}{crcl} & \sqrt{x} & = & -x \\ \Rightarrow & x & = & (-x)^2 \\ \Leftrightarrow & x & = & x^2 \\ \Leftrightarrow & x - x^2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x(x-1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 & OU & x - 1 = 0 \end{array}$$

Donc si x est solution de l'équation, c'est que x vaut 0 ou 1. Puisque 0 convient mais pas 1, on conclut.

2 Les raisonnements de base

Nous allons à présent voir ce que les opérations en logique, et notamment la manipulation d'implications et d'équivalences permet de faire face à un énoncé. On distingue quatre types de raisonnements de base (dont les deux derniers sont relativement proches). On complète la liste à partir de la Terminale par un raisonnement majeur pour les informaticiens théoriciens et présenté dans le cadre de l'étude de suites : le raisonnement par récurrence.

2.1 Le raisonnement direct

C'est le raisonnement le plus standard : on part des données, de l'énoncé en fait, et on enchaîne les implications et les équivalences jusqu'à arriver à la conclusion recherchée. Il est important que les implications aillent toujours dans le sens énoncé vers conclusion.

Le raisonnement direct peut se faire dans les deux sens, à savoir partir de la conclusion et enchaîner les implications réciproques et les équivalences jusqu'à arriver aux données. C'est un peu comme la construction d'un pont en élevant les piliers dans l'ordre que l'on veut, avec cependant une préférence pour les raisonnements qui sont toujours dans le même sens.

Les problèmes qui peuvent se résoudre par un raisonnement direct forment une majorité écrasante, plus de 90 % des cas sans doute.

2.2 La disjonction de cas

Ce raisonnement intervient sous deux formes principales :
- On veut prouver qu'un énoncé est toujours vrai mais le raisonnement doit être abordé différemment, suivant par exemple qu'une variable soit positive ou négative.
- On veut construire un ensemble en tant que réunion des ensembles obtenus dans plusieurs cas disjoints, qui nécessitent eux aussi de fractionner le raisonnement.

Grossièrement, utiliser « un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul » revient à faire une disjonction de cas dans sa deuxième forme : On cherche les solutions à chacune des équations correspondant à un facteur et on rassemble les solutions trouvées.

Quant à la première forme, il s'agit de prouver que dans tous les cas l'énoncé est vrai, et de conclure en précisant qu'un des cas s'applique forcément. Par exemple, s'il faut prouver que la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x}$, définie pour tout réel non nul, ne prend jamais de valeur entre -1 et 1, on peut faire une disjonction de cas :
- Si x est négatif, alors $f(x)$ est aussi négatif. On peut constater que x ou $\frac{1}{x}$ est inférieur ou égal à -1, et l'autre étant négatif on a aussi $f(x) < -1$.
- Si x est positif, alors $f(x)$ est aussi positif. On peut constater que x ou $\frac{1}{x}$ est supérieur ou égal à 1, et l'autre étant positif on a aussi $f(x) > 1$.

2.3 Le raisonnement par contraposée

Dans le cas où l'on doit prouver qu'un énoncé A implique un énoncé B, sans réussir à faire un raisonnement direct, on peut prouver à la place que si B est faux, alors A est faux aussi. On utilise ici $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$.

Par exemple, on veut prouver que si un point D n'est pas dans un plan (ABC), alors les quatre points A, B, C et D sont distincts deux à deux. On suppose par exemple que les points A et B sont confondus. Quoi qu'il arrive, trois points forment un plan, donc (ACD) est un plan. Or $B = A$ donc les quatre points sont dans un même plan, ce qui contredit l'hypothèse. On peut alors conclure.

2.4 Le raisonnement par l'absurde

Ce raisonnement est un cas particulier de raisonnement par contraposée, dans le cas où l'énoncé A se résume à « vrai ». Ainsi, on utilise un raisonnement par l'absurde lorsqu'on veut prouver que B est vrai en supposant que B est faux et en cherchant à trouver une contradiction.

Par exemple, pour prouver qu'un triangle dont les trois côtés sont précisés n'est pas rectangle, on utilise le théorème de Pythagore et on raisonne par l'absurde. On suppose que le triangle est rectangle, on écrit l'égalité déduite avec le côté le plus long comme hypoténuse présumée, on fait le calcul et on ne tombe pas sur une égalité. Puisqu'il y a une contradiction, c'est que notre hypothèse de départ « le triangle est rectangle » est fausse, ce qui permet de conclure.

3 Détection d'erreurs en mathématiques

Cette section complète la présentation des raisonnements en montrant comment on peut se rendre compte rapidement et le plus souvent possible qu'une erreur est apparue dans la résolution d'un exercice. Par la même occasion, un retour sur une grande partie des notions au programme est effectué.

Rappel général : **si deux raisonnements différents conduisent à deux résultats différents, c'est qu'il y a une incohérence**.

3.1 Chapitre des fonctions

Le fil rouge du chapitre des fonctions, et d'ailleurs d'une grande partie des autres chapitres, est la phrase à compléter et invoquer systématiquement dès qu'un lien est fait entre expression et représentation : **« Si un point de coordonnées $(x; y)$ est sur la courbe d'une fonction f, c'est que $f(x) = y$. »**

Ainsi, lorsque l'on dispose à la fois d'une expression et d'une représentation, on vérifie la cohérence d'affirmations telles que $f(2) = 3$, obtenues en lisant la courbe ou en faisant le calcul, par l'autre méthode. Il s'agit de déterminer en cas de contradiction laquelle des méthodes comporte une erreur. Ceci peut d'ailleurs servir pour la vérification dans le chapitre des équations.

Concernant les fonctions affines, leur courbe doit nécessairement être une droite, et deux points suffisent à définir cette droite. Ceci est rappelé dans une section du chapitre de géométrie. Le coefficient directeur de la droite est le coefficient a dans l'expression $f(x) = ax + b$. D'ores et déjà, la pente de la courbe, donc le sens de variation de la fonction, et le signe de a doivent être conformes. De plus, vérifier la cohérence de deux points entre l'expression et la courbe suffit pour garantir que l'expression et la courbe se réfèrent à la même fonction. Le moindre écart témoigne donc d'une erreur.

Concernant les fonctions polynomiales de degré 2, suivant la forme dans laquelle l'expression est donnée (et celles qui peuvent en être déduites), les erreurs détectables par lecture graphique diffèrent :
- Sous forme développée $ax^2 + bx + c$, on observe c en prenant l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que le point $(0; c)$ est censé être sur la courbe [1]. Lorsque b vaut 0, soit l'expression est une identité remarquable (a et c de signe différent), soit l'expression est toujours du même signe, celui de a et c. Dans le premier cas, on trouve très rapidement la forme factorisée (et on remarque que la forme développée et la forme canonique sont les mêmes), dans le deuxième cas, on devrait avoir une courbe toujours du même côté de l'axe des abscisses, sinon il y a une incohérence.
- Sous forme factorisée $(ax+b)(a'x+b')$, puisqu'un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul, on peut détecter une erreur si les abscisses $-\frac{b}{a}$ et $-\frac{b'}{a'}$ (potentiellement identiques) ne sont pas exactement

1. si l'abscisse 0 existe sur cette courbe, bien entendu

celles où la courbe passe par l'ordonnée 0. De plus, on peut aussi développer pour obtenir une vérification supplémentaire [2]
— Sous forme canonique $a(x-\alpha)^2+\beta$, on vérifie que $(\alpha;\beta)$ sont bien les coordonnées du sommet de la parabole.

3.2 Chapitre des équations

Un seul mot d'ordre : dès lors qu'une solution est trouvée, il faut la vérifier en réinjectant cette valeur dans l'équation de départ. Il reste possible d'avoir oublié des solutions, cependant.

Concernant les inéquations, la vérification implique de s'assurer que toutes les bornes d'intervalles (hors infini) correspondent aux cas d'égalité dans l'équation correspondante ou aux valeurs interdites, et entre chaque borne, l'inéquation doit être satisfaite si, et seulement si, l'intervalle fait partie de la solution. Là encore, un oubli de borne peut ne pas être détecté.

Pour les tableaux de signes, l'alternance des $+$ et $-$ est le plus souvent stricte, mais il peut y avoir des exceptions, notamment lorsqu'un facteur au carré apparaît.

3.3 Chapitre des statistiques et probabilités

L'erreur la plus facile à détecter est un mauvais compte dans le coefficient total lorsqu'une moyenne pondérée est calculée. Si la moyenne obtenue n'est pas entre la plus petite et la plus grande valeur, il y a un souci (ceci n'est valable que lorsque tous les coefficients sont positifs).

En probabilités, trouver une probabilité en-dehors de l'intervalle $[0;1]$ est également signe d'un problème de raisonnement, usuellement l'utilisation de la formule $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ alors que les événements A et B ne sont pas disjoints.

3.4 Chapitre de géométrie

La géométrie dans le plan se résume à la révision du vocabulaire de collège et à deux nouvelles formules : les coordonnées du milieu d'un segment et la distance entre deux points.

Lorsqu'une de ces formules doit être utilisée, du fait des confusions possibles et trop souvent constatées, des résultats aberrants peuvent apparaître. Il est donc recommandé pour la première formule de placer deux points et leur milieu présumé, et de rectifier le tir en cas d'incohérence, surtout si le milieu présumé n'est même pas sur le segment. Pour la deuxième formule, on peut mesurer à la règle la distance et la mettre à l'échelle du repère afin d'avoir une valeur approchée, mais aussi utiliser en première vérification une caractérisation de la distance. Soient e_1 l'écart en abscisses entre A et B (valeur positive) et e_2 l'écart en ordonnées (idem). Alors la distance AB est supérieure au maximum de e_1 et e_2 et inférieure à la somme e_1+e_2. Il y a égalité à condition que e_1 ou e_2 soient nuls.

Concernant la géométrie dans l'espace, les erreurs se détectent plutôt en faisant une représentation mentale des objets concernés. On a cependant un outil (certes grossier) supplémentaire pour les calculs de volume. D'une part, comme partout en sciences, les unités doivent être homogènes et cela doit se refléter tant dans la formule (éviter de se tromper) que dans l'application numérique (tout mettre à la même « échelle »). D'autre part, on peut trouver un encadrement de volumes de solides par des volumes de pavés totalement inclus dans le solide ou au contraire contenant totalement le solide. Généralement, l'intervalle dans lequel se situe nécessairement le volume recherché est tout de même encore très vaste, cependant.

2. Si b et b' sont tous les deux non nuls, cette triple vérification garantit l'absence d'erreur.