Correction du BTS blanc de mathématiques

Julien Reichert

Exercice 1

1) La question a été particulièrement bien réussie, donc je ne me donnerai pas la peine de dessiner le graphe.

2) Une justification possible est de dire que la première ligne contient des 1 aux colonnes correspondant aux salles auxquelles la salle A est reliée, etc.

3) $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) a) Puisque les cellules de M^3 donnent le nombre de chemins de longueur 3 de la salle correspondant à la ligne à la salle correspondant à la colonne, pour obtenir le nombre total de chemins de longueur 3, il s'agit de faire la somme de toutes les cellules de la matrice, soit 16.

b) Il y a 3 chemins de longueur 3 de la salle A à la salle B d'après la cellule en ligne 1 et colonne 2 de M^3. Ces chemins sont A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B,
A $\rightarrow$ C $\rightarrow$ A $\rightarrow$ B et A $\rightarrow$ B $\rightarrow$ D $\rightarrow$ B.

c) Le graphe n'admet pas de circuit de longueur 3 (ni en fait de longueur impaire). Cela se voit car la diagonale de M^3 n'est composée que de zéros.

5) a) Pour trouver $M^{[2]}$ et $M^{[3]}$ sans efforts, on remplace juste dans M^2 et M^3 (respectivement) les entiers strictement positifs par des 1.

b) La somme booléenne consiste aussi à remplacer tout ce qui dépasse 1 par 1. Il s'avère alors que dans la somme $M \bigoplus M^{[2]} \bigoplus M^{[3]}$ toutes les cellules sont des 1. La matrice obtenue est précisément celle de la fermeture transitive du graphe G.

Exercice 2

1) a) On obtient $MC = \begin{pmatrix} 90 \\ 244 \\ 388 \end{pmatrix}$ (détailler au moins un calcul).

b) L'élément à la première ligne de MC est le coût d'achat total pour le matériel acheté par les clients annoncés, l'élément à la deuxième ligne est le temps total de conditionnement et l'élément à la troisième ligne est le prix de vente total.

2) a) La première ligne de PM est $\begin{pmatrix} 3a+4 & 4a+4 & 2a+2 \end{pmatrix}$.

b) La première ligne de la matrice I_3 est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par identification, il faut que $3a+4=1$, $4a+4=0$ et $2a+2=0$. Ces trois équations sont équivalentes et ont pour solution $a=-1$.

3) Il suffit d'écrire que si $MX=Y$, alors $PMX=PY$, or $PM=I_3$ et $I_3X=X$ par définition. On conclut que $X=PY$.

4) D'après la question précédente, il s'agit de calculer le produit de P et de la matrice colonne $\begin{pmatrix} 100 \\ 270 \\ 430 \end{pmatrix}$. Le résultat est la matrice $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}$, donc 10 clients pour la formule F_1, 10 pour la formule F_2 et 15 ppour la formule F_3.

Exercice 3

1) Puisque $30 = 2\times 3\times 5$ et $42 = 2\times 3\times 7$, le pgcd de ces nombres est $2\times 3 = 6$. Pour calculer le ppcm, on peut utiliser la formule liant les nombres avec leur pgcd et leur ppcm, ce qui donne $\frac{42\times 30}{6} = 210$.

2) a) On a toujours $m\mathbb{Z} = -m\mathbb{Z}$, puisque les multiples de m sont exactement les multiples de $-m$.

b) Si m divise n, alors n est un multiple de m, et tous les multiples de n, donc les éléments de $n\mathbb{Z}$, sont aussi des multiples de m, donc des éléments de $m\mathbb{Z}$. Ainsi, $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ (avec égalité si, et seulement si, $n = \pm m$).

c) L'intersection $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des éléments communs à ces deux ensembles, c'est-à-dire les multiples à la fois de m et de n. Par définition du ppcm, il s'agit exactement des multiples du ppcm de m et n. Ainsi, $m\mathbb{Z}\cap n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ pour $p = \text{ppcm}(m,n)$.

3) a) La relation est réflexive car tous les entiers sont congrus à eux-mêmes modulo n'importe quel entier, et elle est symétrique car, par exemple, rien ne change si on permute x et y dans la définition de la relation. En revanche, la relation n'est pas antisymétrique, puisque deux éléments différents peuvent être reliés (par exemple 0 et m). Elle n'est pas non plus transitive, sauf si m divise n ou n divise m.

b) On suppose pour cette question et la suivante que m et n sont premiers entre eux. Alors pour tout $x \in E$, x est congru à m éléments de E modulo n (dont lui-même) et à n éléments de E modulo m (dont lui-même). En retirant le doublon, cela donne $m + n - 1$ couples (x, y) dans R, avec $y \in E$.

c) Puisque c'est vrai pour tout x, le cardinal de R est la somme des cardinaux calculés dans la question précédente pour x parcourant E, et puisque ces cardinaux sont toujours les mêmes et que le cardinal de E est mn, cela donne $\#R = mn(m + n - 1)$.