Correction des DM sur les ensembles

Julien Reichert

3 décembre 2014

Premier DM

Exercice 6

Soit la relation R sur $\mathbb{N}$ telle que aRb si et seulement si $b = a^2$.

1) R est réflexive si, et seulement si, pour tout entier naturel a, aRa, c'est-à-dire $a = a^2$. C'est bien évidemment faux.

2) R est symétrique si, et seulement si, pour tous entiers naturels a, b, aRb ssi bRa, c'est-à-dire $b = a^2$ ssi $a = b^2$. C'est bien évidemment faux.

3) R est antisymétrique si, et seulement si, pour tous entiers naturels a, b, $(aRb) \wedge (bRa)$ implique $a = b$. C'est vrai car $b = a^2 \wedge a = b^2$ est équivalent à $(a = b = 0) \vee (a = b = 1)$.

4) R est transitive si, et seulement si, pour tous entiers naturels a, b, c, $(aRb) \wedge (bRc)$ implique aRc, c'est-à-dire $b = a^2 \wedge c = b^2$ (soit $c = a^4$) implique $c = a^2$. C'est bien évidemment faux.

Exercice 7

Une relation symétrique R vérifie que pour tous x et y, xRy est équivalent à yRx. Une relation antisymétrique R vérifie que pour tous x et y, $(xRy) \wedge (yRx)$ implique $x = y$.

Soit une relation symétrique et antisymétrique R. Considérons x et y tels que xRy. Par symétrie, yRx. Ainsi, on a xRy et yRx, et par antisymétrie $x = y$.

Ainsi, pour toute relation symétrique et antisymétrique R, xRy implique que $x = y$, donc la relation ne lie que des éléments égaux.

Réciproquement, si une relation vérifie que xRy implique $x = y$, elle est symétrique (car alors yRx) et antisymétrique (à plus forte raison).

Le nombre de relations symétriques et antisymétriques au sein d'un ensemble à n éléments est en fait de 2^n.

Exercice 8

Soit la relation R sur $\mathbb{Z}$ telle que xRy si et seulement si $x + y$ est pair.

R est réflexive car pour tout x, $x + x = 2x$ est pair.

R est symétrique car $x + y$ est pair si, et seulement si, $y + x$ l'est.

R est transitive car si $x + y$ et $y + z$ sont pairs, $x + z = (x + y) + (y + z) - 2y$ l'est en tant que somme de trois entiers pairs.

Donc R est une relation d'équivalence.

Exercice 9

Bien que la relation décrite dans l'énoncé soit réflexive et symétrique, les octets $x = 00000000, y = 11110000$ et $z = 11111111$ vérifient que x est en relation avec y et y avec z alors que x n'est pas en relation avec z. La relation en question n'est donc pas transitive et il ne s'agit pas d'une relation d'équivalence.

Deuxième DM

Exercice 13

On considère l'application décrite dans la figure sur l'énoncé.

1) Soient $A = \{a; b; c\}$ et $A' = \{a; d; e\}$.

a) $f(A) = \{f(a); f(b); f(c)\} = \{1; 2; 4\}$, $f(A') = \{1; 2; 4\}$.

b) Puisque $A \cap A' = \{a\}$, $f(A \cap A') = \{f(a)\} = \{1\}$, différent de $f(A) \cap f(A')$ (c'est possible quand l'application n'est pas injective).

c) Puisque $A \cup A' = E$, $f(A \cup A') = f(E) = \{1; 2; 4\}$, soit $f(A) \cup f(A')$. D'ailleurs, cette égalité est vraie pour toute application.

2) Soient $B = \{1; 2\}$ et $B`' = \{3; 4\}$.

a) $\overset{-1}{f}(B) = \{a; b; d\}$ et $\overset{-1}{f}(B') = \{c; e\}$.

b) Puisque $B \cap B' = \emptyset$, $\overset{-1}{f}(B \cap B') = \emptyset = \overset{-1}{f}(B) \cap \overset{-1}{f}(B)$. D'ailleurs, cette égalité est vraie pour toute application.

c) Puisque $B \cup B' = F$, $\overset{-1}{f}(B \cup B') = E = \overset{-1}{f}(B) \cup \overset{-1}{f}(B)$. D'ailleurs, cette égalité est vraie pour toute application.

3) f n'est pas injective car 2 et 4 ont plusieurs antécédents.

4) f n'est pas surjective car 3 n'a aucun antécédent.

Exercice 15

1) g n'est pas une application car c n'a pas d'image. On dit que g est une application partielle.

2) f n'est ni injective (car 20 a plusieurs antécédents) ni surjective (car 10 et 30 n'ont aucun antécédent) ; a fortiori, f n'est pas bijective. h est injective et surjective, elle est donc bijective. i n'est ni injective (car c a plusieurs antécédents) ni surjective (car d n'a aucun antécédent) ; a fortiori, i n'est pas bijective.

3) $f(\{a; b\}) = \{20\}$ (pas besoin de le compter deux fois). $\overset{-1}{f}(\{20; 30\}) = \{a; b; c\}$. $h(\{20; 40; 10\}) = \{a; c; d\}$ (en remettant dans l'ordre pour l'esthétique). $\overset{-1}{i}(\{b; d\}) = \{10\}$.

4) L'image de $\{20; 30\}$ par h est $\{b; c\}$, celle de $\{20; 30\}$ par i est $\{a; c\}$.

5) L'image réciproque de $\{a; b\}$ par h est $\{10; 30\}$, celle de $\{a; b\}$ par i est $\{10; 20\}$.

Exercice 16

1) f est injective car tous les éléments de F ont au plus un antécédent, mais elle n'est pas surjective car des éléments de F n'ont aucun antécédent.

2) g n'est pas injective car des éléments de E ont plusieurs antécédents, mais elle est surjective car tous les éléments de E ont au moins un antécédent.

3) La composée $g \circ f$ est une application de E dans E qui à a associe a, à b associe b, à c associe c, à d associe d et à e associe e. Elle est donc injective et surjective, donc bijective. Il s'agit en fait de l'identité de E.

4) La composée $f \circ g$ est une application de F dans F qui à tous les éléments de F associe eux-mêmes, sauf 3 (d'image 2) et 7 (d'image 6). Elle n'est donc ni injective ni surjective car 2 et 6 ont deux antécédents alors que 3 et 7 n'en ont aucun.