Éléments de théorie des ensembles

Julien Reichert

Introduction, notations et vocabulaire

Définition
Un ensemble fini est une collection regroupant des éléments distincts deux à deux et en nombre fini. Les éléments peuvent être de n'importe quel type, et on dit qu'ils appartiennent à l'ensemble. Un ensemble est une collection regroupant des éléments distincts deux à deux, sans qu'il y en ait forcément un nombre fini.

Exemple : Les ensembles fondamentaux en mathématiques sont $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Remarque : On peut écrire un ensemble comme la liste de ses éléments, ou alors par une caractérisation algébrique, voire son nom.

Exemple : L'ensemble des réels compris entre 1 et 3 inclus est l'intervalle $[1;3]$. L'ensemble des entiers naturels pairs est $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N}, x = 2y\}$. Il se réécrit en $2\mathbb{N}$. La notation $\mid$ signifie « tel que », de même que la virgule à droite.

Remarque : L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est comme son nom l'indique l'unique ensemble ne possédant pas le moindre élément.

Remarque : Deux ensembles sont égaux s'ils ont exactement les mêmes éléments, mais l'ordre n'importe pas.

Définition
Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments qui le constituent. On le note $\mathrm{Card}(E)$, $|E|$ ou, de préférence, $\#E$. Le cardinal d'un ensemble infini est par convention $+\infty$, et on ne s'attardera pas sur des précisions supplémentaires[1].

Définition
Soit E un ensemble. Un sous-ensemble F de E est un ensemble dont tous les éléments sont dans E. On dit alors que F est inclus dans E ou, de manière équivalente, que E contient F (mais le même verbe s'applique aussi concernant les éléments, donc mieux vaut éviter), et on écrit $F \subseteq E$.

Remarque : Si de plus on sait que $F \neq E$, alors on a un symbole $\subsetneq$ qui apporte la précision.

Remarque : Si $F \subseteq E$ et que E est un ensemble fini, alors F est un ensemble fini et $\#F \leq \#E$. Si $F \subsetneq E$ et que E est un ensemble fini, alors F est un ensemble fini et $\#F < \#E$. Si $F \subseteq E$ et que F est un ensemble infini, alors E est un ensemble infini, par contraposée.

Définition
Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. Si E est un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini de cardinal $2^{\#E}$.

Exemple : Soit $E = \{1;2;3\}$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est composé des 8 ensembles suivants : $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1;2\}$, $\{1;3\}$, $\{2;3\}$, $\{1;2;3\}$.

Définition
Soient A et B deux ensembles.
– La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble qui contient les éléments d'au moins un des deux ensembles A et B.
– L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble qui contient les éléments communs aux deux ensembles A et B.

1. en gros, il y a plusieurs sortes de cardinaux infinis

– La différence ensembliste de A et B, notée $A \setminus B$, est l'ensemble qui contient, parmi les éléments de A, ceux qui ne sont pas dans B. On l'appelle aussi complémentaire de B dans A, et on le note $\complement_A B$, mais seulement lorsque B est inclus dans A.

Remarque : On a toujours $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$, mais en général $A \setminus B$ n'est pas égal à $B \setminus A$ (c'est vrai si, et seulement si, $A = B$).

Remarque : Soient A et B deux ensembles et $x \in A$. Alors soit x appartient à B (plus précisément à $A \cap B$), soit x appartient à $A \setminus B$. Il s'agit du principe du tiers exclu.

Remarque : On fait le lien entre la logique et les notations ensemblistes. En quelque sorte, un ensemble peut regrouper des éléments rendant une formule vraie. Alors la réunion correspond à un « ou » (disjonction), l'intersection correspond à un « et » (conjonction), l'implication à une inclusion, le complémentaire à une négation.

1 Produit cartésien

Définition
Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F, noté $E \times F$, est l'ensemble de tous les couples **ordonnés**[2] formés par un élément de E à gauche et un élément de F à droite. On peut aussi parler de paires au lieu de couples (en anglais, c'est *pairs*, d'ailleurs). Ainsi, $E \times F = \{(e, f) \mid e \in E \text{ et } f \in F\}$.

Remarque : Si e, f sont à la fois dans E et dans F et sont distincts, alors (e, f) et (f, e) sont deux éléments **distincts** de $E \times F$ (et aussi de $F \times E$).

Proposition
L'ensemble $E \times F$ est fini si, et seulement si, E et F le sont tous les deux. Dans ce cas, on a $\#(E \times F) = \#E\#F$.

Définition
Le produit cartésien de n ensembles E_1, ..., E_n est l'ensemble des n-uplets ordonnés d'éléments respectifs de E_1, ..., E_n. Il est fini si, et seulement si, tous les ensembles E_i sont finis, et dans ce cas le cardinal du produit cartésien est le produit des cardinaux des ensembles.

2 Relations binaires

Définition
Une relation binaire entre un ensemble E et un ensemble F (on peut aussi dire « au sein d'un ensemble E » quand $E = F$) est un sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$. En quelque sorte, la relation est définie par une propriété, et le sous-ensemble en question est l'ensemble des couples qui vérifient ladite propriété.

Exemple : Pour $E = F = \{0; 1; \ldots; 10\}$, la relation $<$, sous-ensemble de $E \times E$, est définie comme $\{(i, j) \mid 0 \leq i < j \leq 10\}$.

Remarque : On peut utiliser pour une relation binaire la notation dite infixe : si $R \subseteq E \times F$ est une relation, on écrira xRy au lieu de $(x, y) \in R$, qui est plus lourd. C'est d'ailleurs le cas pour les relations binaires les plus fréquentes, comme l'égalité et les inégalités.

Définition
Une relation d'équivalence au sein d'un ensemble E est une relation binaire R réflexive[3], symétrique[4] et transitive[5].

Exemple : L'égalité, bien entendu, mais aussi la congruence modulo n'importe quel entier naturel n (pour $n = 0$, c'est l'égalité,

2. donc $E \times F$ et $F \times E$ ne représentent pas le même ensemble si $E \neq F$
3. c'est-à-dire que xRx pour tout x
4. c'est-à-dire que xRy et yRx sont équivalents pour tout x et pour tout y
5. c'est-à-dire que si xRy et yRz alors xRz, encore une fois pour tout x, tout y et tout z

pour $n = 1$, c'est la relation totale). En fait, une relation qui lie deux éléments ayant une caractéristique commune, et que cette caractéristique soit toujours la même, est ordinairement une équivalence. Par exemple, une relation qui lie deux éléments du plan sur la même droite horizontale est une équivalence : la caractéristique commune est l'abscisse ; mais une relation qui lie deux éléments du plan qui ont n'importe quelle coordonnée commune n'est pas une équivalence : les points $(0, 1)$ et $(0, 0)$ sont en relation, les points $(0, 0)$ et $(1, 0)$ aussi, mais pas les points $(0, 1)$ et $(1, 0)$.

Définition
Une relation d'ordre au sein d'un ensemble E est une relation binaire R réflexive, transitive et antisymétrique[6].

Exemple : La relation $\leq$ est une relation d'ordre, mais pas $<$ qui n'est pas réflexive (on parle d'ordre strict, dans ce cas). L'inclusion entre ensembles est aussi une relation d'ordre. L'égalité est aussi une relation d'ordre, c'est d'ailleurs la plus petite possible puisqu'il faut qu'une relation d'ordre soit réflexive.

Définition
Une relation d'ordre R sur E est dite totale si pour tout x et pour tout y dans E on a xRy ou yRx (x et y sont dits comparables).

Exemple : La relation d'ordre $\leq$ est totale, mais $\subseteq$ non (sauf si cette dernière est définie sur des ensembles particuliers, comme par exemple $\{\emptyset; \{0\}; \{0; 1\}; \{0; 1; 2\}\}$).

3 Application f d'un ensemble E dans un ensemble F

Définition
Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à tout élement x de E son image $f(x) \in F$. C'est en quelque sorte une fonction, hormis que son ensemble de départ n'est pas forcément un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Si certains élements x de E n'ont pas d'image, on dit que f est une application partielle.

Remarque : Intuitivement, une application f de E dans F définit une relation binaire $R \subseteq E \times F$ de cardinal $\#E$ (ou moins si l'application est partielle) et telle que xRy si, et seulement si, $y = f(x)$. Ainsi, $(xRy_1 \wedge xRy_2) \Rightarrow y_1 = y_2$ (un élément de E n'a qu'une image par f).

Remarque : On peut faire le rapprochement dans l'autre sens : une relation binaire $R \subseteq E \times F$ définit une application f_R de $E \times F$ dans $\{V, F\}$ telle que $f_R(x, y) = V$ si, et seulement si, xRy, il s'agit de l'application caractéristique d'un ensemble, en l'occurrence d'une relation binaire.

Proposition
Si E est F sont finis, l'ensemble des applications de E dans F est de cardinal $(\#F)^{\#E}$.

Définition
L'image par une application f d'un sous-ensemble A[7] de E, notée $f(A)$, est l'ensemble des images par f des éléments de A. Si A est fini, le cardinal de $f(A)$ est au plus $\#A$.

Définition
L'image réciproque par une application f d'un sous-ensemble B de F, notée $\overset{-1}{f}(B)$, est l'ensemble des antécédents par f des éléments de B. Même si B est fini, l'ensemble $\overset{-1}{f}(B)$ peut être infini (sous réserve que E le soit, pour commencer).

Remarque : Pour la rigueur, on n'écrit pas f^{-1}, notation réservée à l'application réciproque de f, de F dans E, qui n'existe pas forcément, contrairement à une image réciproque. Cependant, nous verrons plus loin que si l'application réciproque existe, alors l'image réciproque de tout sous-ensemble B de F est l'image de B par l'application réciproque.

Remarque : Une application f de E dans F est totale si, et seulement si, $\overset{-1}{f}(F) = E$.

6. c'est-à-dire que si xRy et yRx alors $x = y$
7. traditionnellement, on utilise des majuscules pour les ensembles et des minuscules pour les éléments

Définition
Une application f de E dans F est injective si pour tous $x_1, x_2 \in E$ on a $(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$. En d'autres termes, tout élément de F a au plus un antécédent par f. On dit aussi que f est une injection.

Définition
Une application f de E dans F est surjective si $f(E) = F$. En d'autres termes, tout élément de F a au moins un antécédent par f. On dit aussi que f est une surjection.

Définition
Une application f de E dans F est bijective si elle est à la fois injective et surjective. Alors tout élément de F a exactement un antécédent par f. On dit aussi que f est une bijection.

Remarque : Si une application f de E dans F est injective, alors on peut définir une application réciproque f^{-1} de $f(E)$ dans E qui à y associe l'unique antécédent de y par f. Cette application réciproque est bijective. Si on voulait définir f^{-1} sur F, ce ne serait plus forcément une application totale.

Proposition
Soient E et F deux ensembles.
- Si E et F sont finis et s'il existe une application injective f de E dans F, alors $\#E \leq \#F$.
- Si E et F sont finis et s'il existe une application surjective f de E dans F, alors $\#E \geq \#F$.
- Par conséquent, si E et F sont finis et s'il existe une application bijective f de E dans F, alors $\#E = \#F$.

Remarque : Pour des ensembles infinis, on peut même avoir $E \subsetneq F$ et $f : E \to F$ surjective. Par exemple, l'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 0 \\ 2x - 1 & \text{sinon} \end{cases}$ est bijective et sa réciproque existe [8]... et est donc surjective alors qu'elle va de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$.

Remarque : Il existe une bijection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. Voici un exemple d'application injective de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$:

$$\frac{p}{q} \mapsto \binom{q+p+1}{2} + p$$

où $\frac{p}{q}$ est la forme simplifiée de la fraction en question, et $\binom{n}{2}$ est le coefficient binomial d'indices $n, 2$, qui vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Cette application s'apparente à la fonction d'appariement de Cantor, définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$, qui est une bijection.

Définition
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. La composée de g et f, notée $g \circ f$, est l'application de E dans G qui à x associe $g(f(x))$.

Remarque : La composition est associative, mais n'a aucune raison d'être commutative, même lorsque $E = G$ (et même quand ces ensembles sont égaux à F).

Proposition
Soient f et g deux applications.
- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Remarque :
- Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
- Si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective. On n'a pas besoin de bijection, vu que l'ensemble intermédiaire peut être n'importe quoi.

8. une expression « courte » possible est $\frac{1-(-1)^n(2n+1)}{4}$