Graphes et ordonnancement

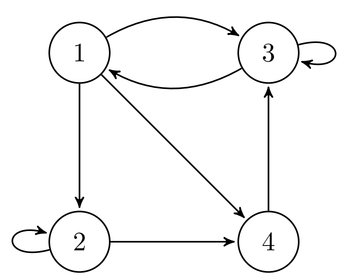
Julien Reichert

1 Graphes

Définition
Un graphe ordonné est la donnée d'un ensemble S de sommets (habituellement des numéros, mais on peut prendre n'importe quel symbole) et d'un ensemble A d'arcs, ceux-ci sont des flèches (d'où l'adjectif « orienté ») reliant deux sommets, de sorte qu'il n'y ait jamais deux arcs qui ont la même source et la même destination [1]. L'ensemble A est en fait un sous-ensemble du produit cartésien $S \times S$, que l'on peut alors voir comme une relation binaire. Le graphe est alors décrit comme le couple (S, A).

Remarque : Dans un graphe non orienté, il y a des arêtes qui n'ont pas de sens précis. Un graphe non orienté pouvant aisément être simulé par un graphe orienté, nous ne considérons que ces derniers ici et nous dirons simplement « graphe ».

On représente habituellement un graphe ainsi :



Remarque : Rien n'interdit à un arc d'arriver à son sommet de départ. Il s'agit alors d'une boucle.

Le graphe ci-dessus est donc $(\{1; 2; 3; 4\}, \{(1; 2); (1; 3); (1; 4); (2; 2); (2; 4); (3; 1); (3; 3); (4; 3)\})$.

Un graphe peut aussi être représenté par une liste d'adjacence, en donnant l'ensemble S et pour chaque élément s de S la liste des sommets tels qu'il existe un arc de s à ces sommets.

Exemple : Toujours avec l'exemple ci-dessus, la représentation par liste d'adjacence est

$$(\{1; 2; 3; 4\}, \{(1, \{2; 3\}); (2, \{2; 4\}); (3, \{1; 3\}); (4, \{3\})\}).$$

Enfin, un graphe peut être représenté par une matrice d'adjacence, qui est une matrice carrée de taille le nombre de sommets, avec un 1 dans la cellule à la ligne i et la colonne j s'il existe un arc du i-ième sommet au j-ième sommet (en ordonnant les sommets au préalable), et un 0 sinon.

Exemple : La matrice d'adjacence du graphe précédent est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans une matrice d'adjacence, les 1 sur la diagonale correspondent aux boucles et le nombre de 1 est le nombre d'arcs.

1. ceci sera néanmoins autorisé dans les graphes pondérés, vus bien plus loin

Définition
Un chemin (ou une chaîne dans un graphe non orienté) dans un graphe est une liste de sommets $s_1 s_2 \dots s_k$ tel que, pour tout $1 \leq i < k$, $(s_i; s_{i+1})$ est un arc. On appelle s_i le prédécesseur de s_{i+1} et s_{i+1} le successeur de s_i dans le chemin. Il n'est pas interdit qu'un chemin passe deux fois par le même sommet, mais il existe alors un chemin strictement plus court de même source (s_1) et même destination (s_k). La longueur du chemin est $k-1$, c'est le nombre d'arcs traversés. La source du chemin est s_1 et sa destination est s_k.

Exemple : Dans le graphe donné, 1 4 3 1 2 est un chemin de longueur 4. On constate qu'il est possible de suivre les flèches pour parcourir ce chemin.

Définition
Un circuit (ou un cycle dans un graphe non orienté) dans un graphe est un chemin tel que $s_k = s_1$, c'est-à-dire dont la destination est aussi la source. Une boucle est alors un circuit de longueur 1.

Exemple : Dans le graphe donné, 1 4 3 1 est un circuit de longueur 3.

Définition
Un chemin hamiltonien est un chemin, nécessairement de longueur $\#S-1$, passant une et une seule fois par chacun des sommets. Un circuit hamiltonien est le prolongement par raccord d'un chemin hamiltonien en un circuit, donc de longueur $\#S$.

Exemple : Dans le graphe donné, 1 2 4 3 est un chemin hamiltonien qui peut se prolonger en le circuit hamiltonien 1 2 4 3 1.

Définition
Un chemin eulérien est un chemin, nécessairement de longueur $\#A$, passant une et une seule fois par chacun des arcs. Un circuit eulérien est un chemin eulérien qui est en plus un circuit.

Exemple : L'intuition d'un circuit eulérien dans un graphe non orienté se retrouve dans les jeux qui consistent à dessiner une figure sans lever le crayon.

Définition
La fermeture transitive d'un graphe (S, A) est un graphe dont l'ensemble des arcs T est la plus petite relation transitive telle que $A \subseteq T \subseteq S \times S$. T est aussi l'ensemble des couples $(s; t)$ tels qu'il existe dans le graphe un chemin de s à t.

Exemple : La fermeture transitive du graphe donné est le graphe dit complet (chaque couple de sommets est relié par un arc). En effet, puisqu'il existe un circuit hamiltonien dans le graphe, c'est que depuis chaque sommet on peut aller à chaque autre sommet.

Définition
La somme booléenne de deux entiers valant 0 ou 1 correspond au « OU » logique et le produit booléen correspond au « ET » logique. Ainsi, la somme booléenne de 1 et 1 sera 1. Les autres résultats sont les mêmes que pour la somme et le produit classique.

Définition
Le produit booléen de deux matrices ne contenant que des 0 et des 1 est le produit matriciel dans lequel la somme définissant chaque cellule du résultat est une somme booléenne.

Remarque : On peut aussi faire le produit booléen en calculant le produit usuel et en remplaçant toutes les valeurs non nulles par 1. Une autre méthode, qui s'explique mieux visuellement, consiste à remplir les lignes du produit booléen en scannant les lignes de la matrice de droite correspondant aux colonnes où la matrice de gauche a un 1 dans la ligne étudiée.

Définition
La puissance booléenne n-ième d'une matrice carrée est sa puissance n-ième par le produit booléen.

Proposition
Soit $M^{[n]}$ la puissance booléenne n-ième de la matrice d'adjacence M d'un graphe (S, A). Alors la cellule à la ligne i et la colonne j de $M^{[n]}$ contient un 1 si, et seulement si, il existe un chemin de longueur n du i-ième sommet du graphe au j-ième sommet du graphe.

Proposition
Soit P la somme booléenne de la matrice d'adjacence M d'un graphe (S, A) à n sommets et de la matrice identité I_n. Alors la puissance booléenne $n-1$-ième de P est égale à la somme booléenne $M \bigoplus M^{[2]} \bigoplus \ldots \bigoplus M^{[n-1]}$, et c'est aussi la matrice d'adjacence de la fermeture transitive du graphe.

Proposition
Soit M^n la puissance usuelle n-ième de la matrice d'adjacence M d'un graphe (S, A). Alors la cellule à la ligne i et la colonne j de M^n contient le nombre de chemins distincts de longueur n du i-ième sommet du graphe au j-ième sommet du graphe. Par ailleurs, on compte le nombre de cycles de longueur n sur la diagonale.

Définition
Un graphe sans circuit est un graphe... dans lequel il n'y a pas de circuit. Dans un graphe sans circuit, le niveau d'un sommet est la longueur du plus long chemin terminant à ce sommet. Ainsi, si un sommet n'a pas de prédécesseur (et au moins un tel sommet existe, puisque le graphe n'a pas de circuit), il aura le niveau 0.

Remarque : On calcule le niveau de chaque sommet de manière récursive. Une fois tous les sommets de niveau 0 trouvés, on attribue a priori le niveau 1 à tous les successeurs des sommets de niveau 0, puis on attribue a priori le niveau 2 à tous les successeurs des sommets de niveau 1, même s'ils ont déjà le niveau 1, puis on continue jusqu'à ce que rien ne soit modifié. Le niveau maximal possible est le nombre de sommets moins un. Là aussi, on est certains que le processus termine car il n'y a pas de circuit dans le graphe.

Définition
Le niveau d'un graphe sans circuit est le plus grand niveau d'un de ses sommets.

Remarque : On peut modifier la représentation graphique d'un graphe sans circuit de sorte que les sommets de même niveau soient alignés horizontalement (ou verticalement, au choix).

Définition
Un arbre est un graphe sans circuit dont un seul sommet, appelé racine, est de niveau 0, et il existe un et un seul chemin, appelé branche, de la racine à chaque autre sommet. Le nombre d'arcs d'un arbre est alors le nombre de sommets moins un. Le reste du vocabulaire s'adapte dans le cas des arbres : prédécesseur/père, successeur/fils, niveau d'un sommet/profondeur du sommet, niveau du graphe/hauteur de l'arbre, sommet sans successeur/feuille (et les autres sommets sont des nœuds), nombre de successeurs/degré.

Définition
Un chemin dans un graphe est dit optimal en longueur s'il n'existe pas de chemin de même source, de même destination et de longueur strictement moindre. Un tel chemin n'est pas forcément unique, mais il en existe au moins un.

Proposition
Tout sous-chemin d'un sous-chemin optimal en longueur est optimal en longueur, mais raccorder deux chemins optimaux en longueur ne donne pas forcément un chemin optimal en longueur.

Remarque : Par convention, on pourra considérer que les chemins optimaux en longueur d'un sommet à un autre sont les chemins vides.

Définition
Un graphe pondéré est un graphe dont les arcs sont étiquetés par un nombre, habituellement entier et potentiellement négatif, appelé le poids [2]. Il peut alors y avoir deux arcs de même source et même destination, mais avec un poids différent (cela dit, l'un des deux serait alors inutile pour les applications qui nous concerneraient).

Remarque : Il faut préciser le poids de chaque arc quand on écrit un chemin dans un graphe pondéré, précisément en raison d'une ambigüité possible.

Définition
Le poids d'un chemin dans un graphe pondéré est la somme des poids des arcs qui forment ce chemin.

2. mais suivant le contexte on peut envisager d'autres termes, notamment coût, durée, etc.

Définition
Un chemin dans un graphe pondéré est dit optimal en valeur (ou en poids) s'il n'existe pas de chemin de même source, de même destination et de poids strictement moindre.

Remarque : Il est possible qu'il n'y ait pas de chemin optimal en valeur lorsque le graphe admet au moins un cycle de poids négatif. Par ailleurs, le calcul de chemins optimaux en valeur est plus difficile lorsqu'il y a des arcs de poids négatif. Dans le cas contraire, on peut utiliser l'algorithme de Dijkstra, qui est plus simple que l'algorithme de Bellman-Ford pour le cas général.

Remarque : Il n'y a aucune raison pour qu'un chemin optimal en longueur soit optimal en valeur, et vice-versa.

2 Ordonnancement

Contexte : On dispose d'une liste de tâches à faire, chacune d'une certaine durée, et certaines tâches peuvent nécessiter que d'autres soient terminées pour se déclencher. La fin du projet est habituellement fixée après un délai donné, ou alors elle doit être le plus tôt possible.

On utilise alors une représentation à base de graphes pondérés, sur lesquels on commence par calculer le niveau de chaque sommet.

Le vocabulaire général pour l'ordonnancement est le suivant :
- Début au plus tôt d'une tâche : Début du projet si la tâche n'a pas de prédécesseur, fin au plus tôt la plus tardive des prédécesseurs sinon.
- Fin au plus tôt d'une tâche : Début au plus tôt de la tâche plus sa durée.
- Fin du plus tard d'une tâche : Fin du projet si la tâche n'a pas de successeur, début au plus tard le plus précoce des successeurs sinon.
- Début au plus tard d'une tâche : Fin au plus tard de la tâche moins sa durée.
- Marge totale d'une tâche : Début au plus tard moins début au plus tôt. C'est donc le retard que la tâche pourrait prendre sans retarder le projet.
- Marge libre d'une tâche : Début au plus tôt la plus précoce d'un successeur moins fin au plus tôt de la tâche. C'est le retard que la tâche pourrait prendre sans avoir la moindre influence.
- Marge certaine d'une tâche : Début au plus tôt la plus précoce d'un successeur moins fin au plus tard de la tâche ; si la valeur est négative, elle est ramenée à 0.
- Chemin critique : chemin, pas forcément unique, reliant des tâches de marge totale nulle. De telles tâches sont appelées tâches critiques, elles ne peuvent pas prendre de retard sous peine de retarder le projet.

Pour calculer toutes ces dates et durées, il existe deux méthodes : la Méthode des Potentiels Metra et la méthode PERT (Program Evaluation and Review Technique). Nous ne nous intéressons ici qu'à la première.

Le graphe obtenu par la méthode MPM a pour sommets les tâches à effectuer, classées par niveau, avec des informations supplémentaires accolées : la date de début au plus tôt, la date de début au plus tard, la marge totale et la marge libre. Ces informations se calculent récursivement et niveau par niveau (de gauche à droite pour le début au plus tôt, de droite à gauche pour le début au plus tard).