Calcul matriciel

Julien Reichert

1 Notions de base

Définition
Une matrice est un tableau comportant $m \geq 1$ lignes et $n \geq 1$ colonnes, dont les cellules contiennent des réels. La dimension de la matrice est $m \cdot n$, on parle alors de « matrice (m, n) », « matrice de taille (m, n) » ou de « matrice $m \times n$ ».

La représentation d'une matrice M avec m lignes et n colonnes figure ci-dessous. L'élément à la i-ième ligne et la j-ième colonne est noté $m_{i;j}$. On peut omettre les points-virgules ou les remplacer par des virgules quand ce n'est pas ambigu.

$$\begin{pmatrix} m_{1;1} & m_{1;2} & m_{1;3} \\ m_{2;1} & m_{2;2} & m_{2;3} \end{pmatrix}$$

Définition
Une matrice (m, n) est carrée lorsque $m = n$.

Définition
Deux matrices sont égales si, et seulement si, elles ont le même nombre de lignes, le même nombre de colonnes et le même élément dans chaque cellule.

Définition
La matrice dite nulle contient 0 dans toutes ses cellules.

Définition
La diagonale d'une matrice **carrée** M est l'ensemble de ses cellules $m_{i;i}$.

Définition
Une matrice **carrée** est dite diagonale si, et seulement si, toutes ses cellules en-dehors de la diagonale contiennent 0. Une ou plusieurs cellules de la diagonale peuvent elles aussi contenir 0, ce n'est pas important.

Définition
Une matrice identité est une matrice diagonale dont toutes les cellules de la diagonale contiennent 1. On la note I_n si n est le nombre commun de lignes et de colonnes de la matrice.

Définition
Une matrice **carrée** est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si, et seulement si, toutes ses cellules strictement au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale contiennent 0.

Définition
Soit M une matrice (m, n). La transposée de M, notée ${}^tM$, est la matrice N de dimensions (n, m) telle que $\forall i, j, n_{i;j} = m_{j;i}$.

Définition
Une matrice **carrée** est dite symétrique si, et seulement si, on a $\forall i, j, m_{i;j} = m_{j;i}$. De manière équivalente, ${}^tM = M$.

Définition
La somme de deux matrices M et N, définie uniquement si M et N ont le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes, est la matrice P, ayant elle aussi autant de lignes et autant de colonnes que M et N, définie par $\forall i, j, p_{i;j} = m_{i;j} + n_{i;j}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

Proposition
La somme de matrices est associative, c'est-à-dire que $M + (N + P) = (M + N) + P$, et commutative, c'est-à-dire que $M + N = N + M$.

Définition
Le produit d'une matrice M par un réel k est obtenu en multipliant par k chaque cellule de M.

Exemple :

$$\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition
Le produit d'une matrice par un réel est distributif par rapport à l'addition de matrices.

Définition
Le produit d'une matrice M, de taille (m, n) et d'une matrice N, de taille (n, p), défini uniquement parce que M a autant de colonnes que N a de lignes, est la matrice P, de taille (m, p), telle que $\forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq p, p_{i;j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i;k} n_{k;j}$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 11 & 9 \\ 8 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Remarque : Il est plus facile d'écrire le produit matriciel en disposant la matrice de droite en hauteur et le résultat à sa place. On obtient l'élément à la ligne i et la colonne j du produit en considérant la ligne i du facteur de gauche et la colonne j du facteur de droite.

Proposition
Le produit matriciel est associatif mais non commutatif. Il est également distributif par rapport à l'addition de matrices.

Remarque : Dans certains cas, le produit est commutatif. Par exemple, $I_n \times M = M$ pour toute matrice M ayant n lignes, et $M \times I_n = M$ pour toute matrice M ayant n colonnes.

Remarque : La proposition « un produit est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul » ne s'applique pas au produit matriciel. Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition
Pour $k \in \mathbb{N}$, la puissance k-ième d'une matrice **carrée** est le produit successif de k exemplaires de cette matrice. Par convention, la puissance 0-ième de toute matrice est la matrice identité de taille adéquate.

Les matrices ont de nombreuses utilisations. On verra leur applications aux graphes dans un chapitre ultérieur. Ici, on se limitera aux systèmes d'équations linéaires.
Soit un tableau, que l'on assimile à une matrice avec n lignes et une colonne (tableau vertical). Son produit à gauche par une matrice (m, n) est un tableau vertical de m lignes. Il correspond au système linéaire défini par chaque ligne du produit, où les inconnues sont les lignes du tableau initial.

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & = b_2 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

2 Inverse d'une matrice

Définition
Soit M une matrice **carrée**. On dit que M est inversible s'il existe une matrice N telle que $MN = NM = I_n$, où n est le nombre de lignes et de colonnes de M. On appelle alors N l'inverse de M et on le note M^{-1}.

Proposition (admise)
Une seule des conditions $MN = I_n$ ou $NM = I_n$ suffit et entraîne l'autre. Ce résultat s'appuie sur une analogie avec les applications linéaires en algèbre linéaire.

Proposition
S'il existe, l'inverse d'une matrice est unique.

Démonstration. Supposons que $MN = MP = I_n$. Alors en multipliant à gauche par N dans l'égalité de droite, on obtient $NMP = NI_n = N$, or $NM = I_n$, d'où $P = N$. □

Proposition
Une matrice et son inverse (s'il existe) commutent.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition : le produit vaut I_n quel que soit l'ordre dans lequel on fait la multiplication. □

Proposition
L'inverse du produit MN, s'il existe, est $N^{-1}M^{-1}$.

Remarque : La transposée du produit MN est ${}^tN{}^tM$. Là aussi, l'ordre est changé.

2.1 Incursion hors du programme : pseudo-inverses

Soit M une matrice (m, n). Un pseudo-inverse de M est une matrice N de dimensions (n, m) telle que :
– $MNM = M$;
– $MNM = M$;
– MN et NM sont symétriques.
Les pseudo-inverses peuvent être utiles pour résoudre des systèmes linéaires décrits par des matrices non carrées... or, ce ne sera pas le cas en ce qui nous concerne.

2.2 Incursion hors du programme : le déterminant

Définition (et proposition)
Soit M une matrice **carrée**. Il existe un réel, nommé déterminant de la matrice et noté $\det(M)$, qui s'écrit également en entourant les nombres de M par des barres verticales au lieu de parenthèses, tel que M est inversible si, et seulement si, $\det(M)$ est non nul. Parmi ses propriétés, on cite notamment que le déterminant d'un produit matriciel est le produit des déterminants des matrices multipliées.

Proposition
Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit de ses éléments diagonaux, idem pour le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

Proposition
Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $ad - bc$.

Proposition
Le déterminant de la amtrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est $aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$. Il s'obtient en multipliant en diagonale (si cela déborde, on repasse de l'autre côté), avec un signe + quand on va de haut-gauche à bas-droite et un signe − quand on va de haut-droite à bas-gauche. **Ce principe ne s'étend pas lorsqu'il y a au moins quatre lignes et colonnes.**

Proposition
L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, s'il existe, est $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Il s'obtient dans le cas général à partir de l'inverse du déterminant (d'où l'intérêt que celui-ci soit non nul) et de la transposée de la comatrice, qui est une matrice obtenue en faisant des déterminants de matrices plus petites... autant laisser tout cela de côté quand il y a plus de 3 lignes et colonnes.

2.3 Pivot de Gauß ou élimination de Gauß-Jordan

Principe : Le pivot de Gauß est une méthode de transformation d'une matrice quelconque en la matrice identité. Cette transformation fait appel à des opérations dites élémentaires. En enregistrant les opérations élémentaires effectuées, on peut résoudre un système linéaire ou déterminer l'inverse de la matrice de départ, lorsque cela est possible.

Définition
Une opération élémentaire sur une matrice est :
– une multiplication d'une ligne ou colonne de la matrice par un réel non nul ;
– un ajout à une ligne (resp. colonne) d'une matrice le produit d'un réel par une autre ligne (resp. colonne) ;
– ou une permutation de deux lignes ou colonnes de la matrice.

Proposition
La matrice diagonale, notée $M^{\text{mult}}_{\lambda;i}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $1 \leq i \leq n$, de dimensions (n, n) et dont toutes les cellules de la diagonale contiennent 1 sauf la i-ième qui contient λ, a les propriétés suivantes :
– pour toute matrice M avec n colonnes, $M^{\text{mult}}_{\lambda;i}M$ est la matrice M dont la i-ième ligne a été multipliée par λ ;
– pour toute matrice M avec n lignes, $MM^{\text{mult}}_{\lambda;i}$ est la matrice M dont la i-ième colonne a été multipliée par λ.

Exemple : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 4b & c \\ d & 4e & f \\ g & 4h & i \end{pmatrix}$

Proposition
La matrice carrée, notée $M^{\text{aug}}_{i;\lambda;j}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $1 \leq i \neq j \leq n$, de dimensions (n, n) et dont toutes les cellules de la diagonale contiennent 1 et la cellule à la i-ième ligne et la j-ième colonne contient λ (les autres cellules contenant 0), a les propriétés suivantes :
– pour toute matrice M avec n colonnes, $M^{\text{aug}}_{i;\lambda;j}M$ est la matrice M dont la i-ième ligne a été augmentée de λ fois la j-ième ligne ;
– pour toute matrice M avec n lignes, $MM^{\text{aug}}_{i;\lambda;j}$ est la matrice M dont la i-ième colonne a été augmentée de λ fois la j-ième colonne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-3g & b-3h & c-3i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

Proposition
La matrice carrée, notée $M^{\text{perm}}_{i;j}$, avec $1 \leq i \neq j \leq n$, de dimensions (n, n) et dont toutes les cellules de la diagonale contiennent 1 sauf la i-ième et la j-ième qui contiennent 0, dont les cellules à la i-ième ligne et la j-ième colonne et à la j-ième ligne et la i-ième colonne contiennent 1 et toutes les autres cellules contient 0, a les propriétés suivantes :
– pour toute matrice M avec n colonnes, $M^{\text{perm}}_{i;j}M$ est la matrice M dont la i-ième ligne et la j-ième ligne ont été échangées ;
– pour toute matrice M avec n lignes, $MM^{\text{perm}}_{i;j}$ est la matrice M dont la i-ième colonne et la j-ième colonne ont été échangées.

Exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$

Remarque : Pour le pivot de Gauß, les échanges de lignes ne sont pas nécessaires, mais ils facilitent parfois le calcul. En outre, on ne fait les multiplications par des matrices d'opérations élémentaires que dans un sens tout au long. D'ordinaire (pour les systèmes linéaires en tout cas), il s'agit d'opérations sur les lignes, donc les matrices d'opérations élémentaires figurent à gauche.

Proposition
Soit M une matrice carrée (n, n). Si en multipliant M par une succession de matrices d'opérations élémentaires on obtient I_n, alors la même succession de multiplications à partir de I_n donne l'inverse de M.

Remarque : Il ne s'agit que d'une réécriture de la définition de l'inverse en tenant compte de l'associativité du produit matriciel. L'intérêt du pivot de Gauß est de choisir les matrices de manière pertinente.

Proposition
Soit A une matrice carrée (n, n) et soit un système linéaire $AX = B$. Si en multipliant A par une succession de matrices d'opérations élémentaires on obtient I_n, alors la même succession de multiplications à partir de B donne l'unique vecteur solution du système.

Exemple :

Prenons $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ en parallèle avec I_3. On cherche à transformer M en I_3 par des opérations élémentaires sur les lignes. Pour commencer, il faudrait tout en haut à gauche un 1 (par exemple). On divise donc la première ligne par 2, par l'opération élémentaire revenant à multiplier M à gauche par $M^{\text{mult}}_{\frac{1}{2},1}$. On fait de même pour I_3 et on obtient les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ensuite, on cherche à annuler la première colonne de la nouvelle matrice en retirant le nombre adéquat de fois la première ligne, dont l'élément de la première colonne est le bon. Cela revient à multiplier à gauche par $M^{\text{add}}_{2;-4;1}$ et par $M^{\text{add}}_{3;2;1}$. On obtient successivement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La première colonne étant en ordre, on passe à la deuxième (mais on aurait pu, avec l'intuition que ce serait plus facile, faire la troisième d'abord, voire permuter la deuxième et la troisième ligne juste avant). Cette fois-ci, on multiplie la deuxième ligne par $-\frac{1}{3}$ grâce à $M^{\text{mult}}_{-\frac{1}{3},2}$, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on cherche encore à annuler le reste de la colonne, via $M^{\text{add}}_{1;-1;2}$ et $M^{\text{add}}_{3;-3;2}$. Il faut garder à l'esprit que la première colonne ne sera plus affectée dans la matrice de gauche, précisément parce qu'il n'y a que des zéros dans toutes les lignes sauf la première.

On obtient donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il ne reste qu'à s'occuper de la troisième colonne, en commençant par multiplier la troisième ligne par $-\frac{1}{4}$ grâce à $M^{\text{mult}}_{-\frac{1}{4},3}$, d'où

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Et on annule les deux derniers éléments grâce à $M^{\text{add}}_{1;\frac{1}{2};3}$ et $M^{\text{add}}_{2;-2;3}$, pour obtenir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{8} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

et on vérifie pour terminer que $M \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{24} & \frac{5}{24} & -\frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$ vaut bien I_3.

Remarque : Pour faciliter les choses, vérifier que $M \times \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 4 & 4 & 12 \\ 6 & -6 & -6 \end{pmatrix}$ vaut bien $24I_3$. Au passage, 24 est bien pressenti pour être le déterminant de M (et c'est le cas).

Enfin, pour résoudre le système $MX = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, par exemple, on utilise exactement les mêmes opérations élémentaires dans le même ordre sur le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on obtient successivement les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On vérifie que $M \times \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.