Chapitre 3 : Calcul intégral

Julien Reichert

Résumé du chapitre : Intégrer, c'est faire le contraire de dériver.

Pour compléter le résumé : Intégrer, c'est calculer des aires.

Définition
Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'aire du domaine fermé délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Il s'agit donc de « l'aire sous la courbe de f », on la note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Lorsque a et b sont fixés, il s'agit d'un nombre réel.

Remarque : Le symbole $\int$ est un S déformé, l'intégrale est en fait la somme d'une multitude d'aires élémentaires, ces aires étant chacune le produit d'un petit écart de largeur, $\mathrm{d}x$, par une longueur, $f(x)$. Ce $\mathrm{d}x$ est le même que dans l'écriture rigoureuse d'une dérivée : $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Remarque : Puisque l'intégrale d'une fonction sur un intervalle fixé est un nombre réel, la variable x est dite muette, c'est-à-dire qu'on peut remplacer chacune de ses occurrences par n'importe quel autre symbole sans que le résultat ne change.

Définition
Soit f une fonction continue et négative sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est l'opposé de l'aire du domaine fermé délimité par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. Il s'agit donc de $-\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$.

Définition
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. L'intégrale de f sur $[a, b]$ s'obtient en additionnant les intégrales de f sur les sous-intervalles de $[a, b]$ où f est de signe constant.

Remarque : Il est possible de définir une intégrale « à l'envers », cela revient à prendre l'opposé de l'intégrale « à l'endroit ». Ainsi, $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Proposition
Soient a, b, c des réels dans l'intervalle de définition d'une fonction continue f. Alors on a une relation de Chasles $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$. En posant $c = a$, on retrouve la remarque précédente, sachant que l'intégrale de n'importe quelle fonction sur un intervalle réduit à un point est zéro.

Proposition
Soient a et b des réels dans l'intervalle de définition de deux fonctions continues f et g, et k un réel. Alors $\int_a^b kf(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Cette propriété s'appelle la linéarité de l'intégrale.

Proposition
Soient a et b des réels dans l'intervalle de définition de deux fonctions continues f et g, avec $a \leq b$. On suppose que $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. L'intégrale préserve donc l'ordre.

Remarque : Dans la proposition précédente, puisque f et g sont continues, si $a < b$ et s'il existe au moins un point où f est strictement inférieure à g, alors il existe un intervalle où f est strictement inférieure à g, et l'inégalité précédente est stricte.

Proposition
Soit f une fonction continue et soit a dans l'intervalle de définition de f.

- Si f est paire (c'est-à-dire que $f(-x) = f(x)$ pour tout x), alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si f est impaire (c'est-à-dire que $f(-x) = -f(x)$ pour tout x), alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Définition
Soit a un réel dans l'intervalle de définition d'une fonction continue f. La fonction F, définie sur l'intervalle de définition de f par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue et même dérivable, de dérivée f. On dit alors que F est **une** primitive de f, et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Remarque : Avec les notations de la définition précédente, l'ensemble des primitives de f sont les fonctions $F + k$, où k parcourt $\mathbb{R}$.

Proposition
Soient a et b des réels dans l'intervalle de définition d'une fonction continue f, soit F une primitive quelconque de f. Alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. On écrit aussi $[F(x)]_a^b$ pour exprimer la différence $F(b) - F(a)$ lorsque F a une écriture longue et fastidieuse.

Remarque : Pour trouver la primitive d'une fonction usuelle, on peut regarder le tableau des dérivées usuelles et le prendre dans l'autre sens.

Proposition
Soient a et b des réels distincts dans l'intervalle de définition d'une fonction continue f. La moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : On retrouve le rapprochement entre une intégrale et une somme. Cette formule se retrouvera ultérieurement avec les probabilités continues.

Application : L'indice de Gini $\gamma = 2\int_0^1 (x - f(x))\,\mathrm{d}x$ pour une fonction de répartition f définie sur $[0, 1]$. Le nombre $\frac{\gamma}{2}$ est la moyenne des écarts entre x et $f(x)$.

Méthode pour trouver une primitive d'une fonction non usuelle : on « cherche des motifs ».

Exemple : On cherche une primitive de la fonction $f(x) = (x + 1)e^x = xe^x + e^x$. En écrivant l'expression de droite comme $uv' + u'v$, avec $u(x) = x$ et $v(x)e^x$, on déduit qu'une primitive de $f(x)$ n'est autre que uv, soit xe^x. On vérifie en dérivant l'expression obtenue qu'on retombe bien sur $f(x)$.

Ceci permet de trouver l'intuition de la formule (hors-programme) d'intégration par parties : pour a et b des réels dans l'intervalle de définition de deux fonctions continues f et g, on a $\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Cette formule s'utilise lorsqu'il est difficile de trouver par la recherche de motifs ou le tableau des dérivées usuelles la primitive d'une expression qu'on peut décomposer comme un produit de fonctions plus abordables.