Fiche de révision Terminale ES

Julien Reichert

Légende (pour le fichier en couleurs…) : en rouge, les formules et théorèmes à savoir par cœur ; en vert, les méthodes qu'il vaut mieux maîtriser ; en bleu, les définitions.

Chapitre 1 - suites

Suite arithmétique de raison r : La différence entre deux termes consécutifs est constante, soit $u_{n+1} = u_n + r$.

Terme général d'une suite arithmétique : $u_n = u_0 + r \times n$.

Somme des termes d'une suite arithmétique : $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + \cdots + u_n = \frac{u_0+u_n}{2}(n+1)$.

Somme à partir d'un certain rang : $\sum_{i=k}^{n} u_i = u_k + \cdots + u_n = \frac{u_k+u_n}{2}(n-k+1)$.

Dans les formules ci-dessus, $n+1$ et $n-k+1$ sont le nombre de termes sommés ; $\frac{u_0+u_n}{2}$ et $\frac{u_k+u_n}{2}$ sont les moyennes des termes sommés.

Suite géométrique de raison q : Le rapport entre deux termes consécutifs est constant (exception : si $q = 0$, ce rapport n'a aucun sens, mais une telle suite peut exister), soit $u_{n+1} = u_n \times q$.

Terme général d'une suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$.

Somme des termes d'une suite géométrique de raison $\neq 1$: $\sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 + \cdots + u_n = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Somme à partir d'un certain rang : $\sum_{i=k}^{n} u_i = u_k + \cdots + u_n = u_k \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q}$.

Dans la formule ci-dessus, $n+1$ et $n-k+1$ sont le nombre de termes sommés ; u_0 et u_k sont les premiers termes sommés.

Suite arithmético-géométrique : La relation de récurrence est $u_{n+1} = q \times u_n + r$, avec $q, r \in \mathbb{R}$.

Attention : Il ne faut surtout pas écrire $u_n = u_0 \times q^n + r \times n$, c'est faux !

Terme général d'une suite arithmético-géométrique : On utilise une suite auxiliaire, fournie par l'énoncé, qui est en fait définie comme $u_n - \frac{r}{1-q}$. Il faut prouver que la suite auxiliaire est géométrique, donc écrire v_{n+1}, si la suite est appelée (v_n), comme un réel, qui s'avère être q, fois v_n.

Le terme général sera alors $u_n = (u_0 - \frac{r}{1-q}) \times q^n + \frac{r}{1-q}$.

Variations des suites : une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive et décroissante si sa raison est négative. Une suite géométrique est croissante si sa raison est supérieure à 1 et son premier terme positif OU si sa raison est entre 0 et 1 et son premier terme est négatif, décroissante si sa raison est supérieure à 1 et son premier terme négatif OU si sa raison est entre 0 et 1 et son premier terme est positif. Une suite arithmético-géométrique est monotone si $q > 0$. On compare les deux premiers termes pour savoir la variation, sans s'encombrer de la caractérisation (qui se retrouve dans le terme général.

Seuils pour une suite géométrique (éventuellement arithmético-géométrique) : On peut utiliser un algorithme pour déterminer à partir de quel rang le terme général d'une suite géométrique ou arithmético-géométrique dépassera (sera inférieur ou supérieur, suivant l'énoncé) un réel donné. On peut aussi résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation en utilisant les logarithmes, et prendre l'entier directement supérieur à la solution.

Exemple : $u_n = 3 \times 2^n - 5$ (arithmético-géométrique, $u_{n+1} = 2u_n + 5$). On cherche quand $u_n > 100$. On résout :

$$\begin{array}{rrl} & 3 \times 2^n - 5 & > 100 \\ \Leftrightarrow & 3 \times 2^n & > 105 \\ \Leftrightarrow & 2^n & > 35 \\ \Leftrightarrow & \ln(2^n) & > \ln(35) \\ \Leftrightarrow & n \ln(2) & > \ln(35) \\ \Leftrightarrow & n & > \frac{\ln(35)}{\ln(2)} \end{array}$$

Le plus petit entier solution est 6.

Chapitre 2 - fonctions

Nombre dérivé en un point d'une fonction : $f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Dérivée d'une fonction : Fonction qui donne les variations de la fonction en question.

Équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Quand sa dérivée est positive, une fonction est croissante ; quand sa dérivée est négative, une fonction est décroissante.

Dérivées usuelles :

Rappel : $\frac{1}{x} = x^{-1}$ et d'ailleurs $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. L'entrée x^n permettrait de retirer beaucoup d'autres entrées du tableau, mais elles ont été maintenues.

Fonction usuelle	Sa dérivée	Fonction composée	Sa dérivée
$k \in \mathbb{R}$	0	$u+v$	$u'+v'$
x	1	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	uv	$u'v+uv'$
x^2	$2x$	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$x^n (n \in \mathbb{Z})$	nx^{n-1}	u^n	$nu'u^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^x	e^x	e^u	$u'e^u$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$

Fonction continue : Sa courbe peut être dessinée sans lever la main.

Presque toutes les fonctions définies sur un intervalle sont continues.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$. Pour tout réel c entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel x entre a et b tel que $f(x) = c$.

Utilisation principale : Le réel x est unique quand f est strictement monotone entre a et b. Ainsi, dans le tableau de variations, on compte le nombre d'antécédénts par f de n'importe quel réel en étudiant les intervalles où la fonction est strictement monotone.

Fonction convexe : Sa courbe est au-dessus de chacune des tangentes. Fonction concave : Sa courbe est au-dessous de chacune des tangentes.

Si une fonction est dérivable, là où sa dérivée est croissante, la fonction est convexe ; là où sa dérivée est décroissante, la fonction est concave.

Par conséquent, si une fonction est dérivable deux fois, là où sa dérivée seconde est positive, la fonction est convexe ; là où sa dérivée seconde est négative, la fonction est concave.

Point d'inflexion : point où la tangente coupe la courbe. Par abus : l'abscisse du point. La fonction change de convexité en un point d'inflexion, donc si la fonction est dérivable deux fois, sa dérivée seconde s'annule et change de signe en un point d'inflexion.

Une fonction exponentielle est de la forme q^x, avec $q > 0$. Elle a toujours des valeurs strictement positives. La fonction exponentielle est e^x, où e est la constante d'Euler, valant environ $2,718$.

Pour tout $q > 0$, **en particulier pour e**, une exponentielle transforme une somme en produit et un produit en puissance. $q^{a+b} = q^a \times q^b, q^{-a} = \frac{1}{q^a}$ et $q^{ab} = (q^a)^b = (q^b)^a$.

Dérivées : $(e^x)' = e^x, (e^{kx})' = ke^{kx}, (e^{u(x)})' = u'(x) \times e^{u(x)}$ et $(q^x)' = \ln q \times q^x$.

Comme $e^x > 0$ pour tout x, la fonction exponentielle est strictement croissante, et par conséquent strictement convexe. Les fonctions exponentielles sont strictement croissantes quand $q > 1$ et strictement décroissantes quand $0 < q < 1$. Elles sont cependant toutes convexes.

Conséquence : on peut résoudre les inégalités en faisant apparaître ou disparaître des exponentielles, $e^x = e^y$ si et seulement si $x = y$; $e^x \neq e^y$ si et seulement si $x \neq y$; $e^x > e^y$ si et seulement si $x > y$; $e^x \geq e^y$ si et seulement si $x \geq y$; $e^x < e^y$ si et seulement si $x < y$; $e^x \leq e^y$ si et seulement si $x \leq y$.

La fonction logarithme népérien $\ln x$ est la réciproque de la fonction exponentielle. Elle est définie sur l'ensemble des **réels strictement positifs**. Pour tout x pour lequel cela a un sens, on peut introduire ou retirer l'exponentielle du logarithme ou le logarithme de l'exponentielle : $e^{\ln x} = x = \ln e^x$.

Un logarithme transforme un produit en somme et une puissance en produit. $\ln(ab) = \ln a + \ln b, \ln \frac{1}{a} = -\ln a$ et $\ln(a^n) = n \ln a$.

Dérivées : $(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Comme $\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction logarithme népérien est strictement croissante, et elle est concave car sa dérivée seconde est $\frac{-1}{x^2}$.

Conséquence : on peut résoudre les inégalités en faisant apparaître ou disparaître des logarithmes, $\ln x = \ln y$ si et seulement si $x = y$; $\ln x \neq \ln y$ si et seulement si $x \neq y$; $\ln x > \ln y$ si et seulement si $x > y$; $\ln x \geq \ln y$ si et seulement si $x \geq y$; $\ln x < \ln y$ si et seulement si $x < y$; $\ln x \leq \ln y$ si et seulement si $x \leq y$.

Chapitre 3 - calcul intégral

Intégrale d'une fonction continue : c'est avant tout « l'aire sous la courbe », comptée négativement lorsque la fonction est négative. On écrit $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, en n'oubliant pas le dx (et en remplaçant x si ce n'est pas la variable utilisée).

Valeur approchée d'une intégrale : on applique la définition de base de l'intégrale et on compte les carreaux, en n'oubliant surtout pas la mise à l'échelle. Pour une fonction positive, si on ne compte pas les carreaux entamés mais non totalement recouverts, on a une borne inférieure ; si on compte tous les carreaux entamés, on a une borne supérieure. Pour une fonction négative, c'est le contraire, et quand le signe change, on fait un en quelque sorte les deux à la fois.

Primitive d'une fonction f : c'est une fonction F dont la dérivée est f. Toutes les fonctions $F + k$, où k est une constante, sont alors des primitives de f.

Relation de Chasles pour les intégrales : $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x$.

Calcul d'une intégrale : L'intégrale de f entre a et b vaut $F(b) - F(a)$, ce qui s'écrit aussi $[F(x)]_a^b$, pour n'importe quelle primitive F de f.

Valeur moyenne d'une fonction entre a et b : Elle est donnée par la formule $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Chapitre 4 - probabilités

Variable aléatoire : variable pouvant prendre plusieurs valeurs (les issues, dont l'ensemble est appelé univers), telle que la valeur prise soit déterminée au hasard.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire : Étant donné l'univers, la loi de probabilité associe à toute issue une probabilité, à savoir un nombre réel positif tel que la somme de toutes les probabilités soit 1.

Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X : C'est la somme, notée $E(X)$, des produits $k \times P(X = k)$, pour tous les k de l'univers. Il s'agit en quelque sorte d'une moyenne pondérée des issues, dont les coefficients sont les probabilités.

Variance d'une variable aléatoire réelle discrète X : C'est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne, soit $E((X - E(X))^2)$. On la note $V(X)$. L'écart-type est la racine carrée de la variance.

Évènement : Ensemble d'issues. Deux évènements sont dits indépendants lorsque (plusieurs autres caractérisations possibles) la probabilité de leur intersection $P(A \cap B)$ est le produit de leurs probabilités $P(A) \times P(B)$.

Partition de l'univers : Ensemble d'évènements de réunion l'univers et d'intersection vide deux à deux.

Probabilité conditionnelle de B sachant A : C'est le rapport $P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

Formule des probabilités composées : On lit la formule précédente « dans l'autre sens », donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Formule des probabilités totales : $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B) = P(B)$, ce qui se réécrit en $P(A)\times P_A(B)+ P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = P(B)$

Formule supplémentaire : $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

Ces formules s'étendent aux partitions.

Loi uniforme : Toutes les issues ont la même probabilité, qui est l'inverse de la taille de l'univers.

Loi de Bernoulli : Toute loi n'ayant que deux issues, dont l'une est retenue comme favorable.

Loi binomiale de paramètres n et p : Loi suivie par une variable aléatoire X comptant le nombre de fois où l'on obtient l'issue favorable sur n répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli telle que la probabilité de l'issue favorable soit p. On a $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, où $\binom{n}{k}$ est le coefficient binomial de paramètres n et k. On a alors $E(X) = np$ et $V(X) = np(1 - p)$.

Fonction densité de probabilité : Fonction continue, positive et d'intégrale 1 sur son intervalle de définition.

Variable aléatoire réelle continue X : La loi de probabilité suivie dépend d'une fonction de densité f, de sorte que $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

Loi uniforme continue : La fonction f est constante, de valeur $\frac{1}{b-a}$ partout si $[a;b]$ est l'intervalle de définition (possiblement ouvert à gauche et/ou à droite). On a alors $P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$ si $a \leq c \leq d \leq b$.

Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$: La fonction f est la fonction de Gauß $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, définie sur $\mathbb{R}$ et dont la courbe est en forme de cloche. L'espérance de X est 0 et son écart-type est 1. Valeurs remarquables : Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, $P(-k \leq X \leq k) = 2P(0 \leq X \leq k)$. De plus :
- $P(-1 \leq X \leq 1) \simeq 0,68$;
- $P(-2 \leq X \leq 2) \simeq 0,954$;
- $P(-3 \leq X \leq 3) \simeq 0,997$;
- Le réel k tel que $P(-k \leq X \leq k) = 0,95$ vaut environ $1,96$;

Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$: La variable aléatoire X suit cette loi si la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$. La fonction de densité associée est alors $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. L'espérance de X est alors μ et son écart-type est σ. Valeurs remarquables : Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, $P(\mu-k \leq X \leq \mu+k) = 2P(\mu \leq X \leq \mu+k)$. De plus :
- $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = \frac{1}{2}$.
- $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) \simeq 0,68$;
- $P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma) \simeq 0,954$;
- $P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma) \simeq 0,997$;
- Le réel k tel que $P(\mu-k\sigma \leq X \leq \mu+k\sigma) = 0,95$ vaut environ $1,96$;

Échantillonnage : Tout le cours est à consulter, il n'y a que deux notions principales autour desquelles tout gravite.