Chapitre 2 : Fonctions de la variable réelle

Julien Reichert

7 décembre 2014

Rappel : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable[1] sur D. Si f' est positive (resp. strictement positive, négative, strictement négative, nulle) sur un intervalle I, alors f est croissante (resp. strictement croissante, décroissante, strictement décroissante, constante) sur ce même intevalle. De plus, si f est de signe constant et ne s'annule qu'en des points isolés, alors f est **strictement** monotone.

Proposition
La somme de deux fonctions croissantes est croissante (et donc la différence d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est croissante, puisque l'opposé d'une fonction croissante est décroissante).
La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.
L'inverse d'une fonction croissante et de signe constant est une fonction décroissante.
Le produit de deux fonctions croissantes et positives est une fonction croissante et positive.
Le produit de deux fonctions décroissantes et positives est une fonction décroissante et positive.
La variation du produit d'une fonction positive par une fonction négative peut s'obtenir en étudiant l'opposé de cette dernière.
Si on étudie le quotient de deux fonctions, on peut aussi considérer les variations de l'inverse.

Démonstration. Exercice (écrire la caractérisation d'une fonction croissante : $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$). □

Rappel : Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in D$. Le nombre dérivé en a de la fonction f, lorsqu'il existe, est la limite pour h tendant vers 0 du quotient $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si celle-ci est finie. On note alors ce nombre $f'(a)$.
Soit D_1 l'ensemble sur lequel le nombre dérivé de la fonction f existe. La fonction qui à $a \in D_1$ associe $f'(a)$ est appelée la dérivée de f.

Proposition
Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La tangente au point $(a, f(a))$ à la courbe représentative de f a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Rappel : Les dérivées usuelles.
- Si $f(x) = x^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, alors $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Si $f(x) = \sqrt{x}$, alors $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ [2]
- Si $f(x) = \frac{1}{x^n}$, alors $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$ [3]
- Si $f = g + h$ avec g et h qu'on sait dériver, alors $f' = g' + h'$.
- Si $f = g \cdot h$ avec g et h qu'on sait dériver, alors $f' = g \cdot h' + h \cdot g'$.
- Si $f = \frac{1}{h}$ avec h qu'on sait dériver, alors $f' = -\frac{h'}{h^2}$.
- Si $f = \frac{g}{h}$ avec g et h qu'on sait dériver, alors $f' = \frac{g' \cdot h - h \cdot g'}{h^2}$.

Définition
Soient $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ telles que l'ensemble des valeurs de f_1 soient toutes dans D_2. La composée de

1. Évoquer une fonction dérivable alors que les fonctions continues sont définies plus bas est un abus qui prouve décidément que tout est permis au lycée…
2. En écrivant $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, on observe que la formule pour x^n semble s'étendre à tous les réels… et c'est bien le cas !
3. La remarque précédente s'applique en particulier pour les entiers négatifs.

f_2 et f_1, notée $f_2 \circ f_1$, est la fonction $g : D_1 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f_2(f_1(x))$.

Proposition
Soient $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que l'ensemble des valeurs de f_1 soient toutes dans D_2. Soit $g = f_2 \circ f_1$. La fonction g est dérivable et sa dérivée vérifie $g(x) = f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x)$.

Démonstration. On cherche à calculer $\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$. En multipliant en haut et en bas par $f_1(a+h) - f_1(a)$ et en séparant les fractions, l'expression précédente est égale à

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_2(f_1(a+h)) - f_2(f_1(a))}{f_1(a+h) - f_1(a)} \cdot \frac{f_1(a+h) - f_1(a)}{h}$$

où le facteur de gauche correspond [4] au nombre dérivé en $f_1(a)$ de la fonction f_2 et le facteur de droite est le nombre dérivé en a de la fonction f_1. ☐

Remarque : Une grande partie des dérivées usuelles se retrouve via la formule de dérivation de la composée. Même si cette formule ne semble pas au programme, il est bon de la connaître, ne serait-ce que pour vérifier des expressions de dérivées si la calculatrice est interdite.

1 Continuité et convexité

Définition
Une fonction (définie sur un intervalle, par commodité) continue est une fonction qu'on peut dessiner « sans lever le crayon ».

Remarque : Une définition plus rigoureuse d'une fonction continue est qu'elle vérifie pour tout a de l'ensemble de définition $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. La vraie définition de la continuité d'une fonction f définie sur un intervalle I est que f vérifie $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$.

Exemple : Les fonctions usuelles sont toutes continues sur leur ensemble de définition [5].

Proposition (Les théorèmes généraux)
Les sommes, produits et composées de fonctions continues sont continues.

Remarque : Lorsqu'il faut prouver qu'une fonction est continue (ou dérivable), il suffit habituellement de dire « d'après les théorèmes généraux ». Ce qui est bon pour l'écrit des grandes écoles est bon pour le bac...

Remarque : Si une fonction est définie par morceaux, les théorèmes généraux s'appliquent éventuellement sur les morceaux. Pour prouver la continuité de la fonction, il faut aussi vérifier que les morceaux se recollent.

Remarque : Une fonction dérivable sur un intervalle est nécessairement continue sur le même intervalle. La réciproque n'est pas forcément vraie, et le contre-exemple le plus classique est la fonction racine, qui est continue sur l'ensemble des réels positifs et dérivable sur le même intervalle sauf en 0.

Rappel : Le théorème des valeurs intermédiaires. Soit f une fonction continue. Soient a et b dans l'ensemble de définition de f et tels que $a < b$. Alors tout réel entre $f(a)$ et $f(b)$ (si $f(b) < f(a)$, permuter...) est l'image par f d'au moins un réel entre a et b.

Remarque : Il y a beaucoup d'autres formulations équivalentes de ce théorème.

4. ce n'est pas l'expression vue en cours, mais c'est une expression qui a les caractéristiques requises d'un nombre dérivé
5. On rappelle que la fonction inverse n'est pas définie en zéro.

Définition
Une fonction est dite convexe si sa courbe est située entièrement au-dessus de chacune des tangentes.
Une fonction est dite concave si sa courbe est située entièrement au-dessous de chacune des tangentes.

Exemples : La fonction carré est convexe, la fonction racine est concave. Une fonction affine, confondue avec toutes ses tangentes, est à la fois concave et convexe (seules telles fonctions). Rappelons qu'une tangente touche la courbe au moins au point en question, donc il n'est pas question d'être strictement au-dessus ou au-dessous dans la définition.

Remarque : Il n'est pas nécessaire qu'une fonction soit continue pour être convexe. Par exemple la fonction définie par morceaux telle que $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est convexe. En fait, f doit être continue sur $]a;b[$ si elle est définie sur $[a;b]$, et tout peut arriver si l'ensemble de définition de f n'est pas un intervalle.

Proposition
Une fonction dérivable est convexe si, et seulement si, sa dérivée est croissante.
Une fonction dérivable est concave si, et seulement si, sa dérivée est décroissante.

Conséquence : Une fonction dérivable deux fois [6] est convexe si, et seulement si, sa dérivée seconde est positive ; elle est concave si, et seulement si, sa dérivée seconde est négative.

Définition
Un point d'inflexion d'une fonction [7] est un point tel que la tangente en ce même point traverse la courbe représentative de la fonction. Par conséquent, la fonction « change de convexité ». Si la dérivée seconde de la fonction est définie, alors elle s'annule et change de signe au niveau d'un point d'inflexion ; en particulier, la dérivée de la fonction change alors de sens de variation.

2 Fonction exponentielle

Définition
On définit la fonction exponentielle de base $q > 0$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles $x \mapsto q^x$. C'est le prolongement de la suite géométrique $u_n = q^n$.

Proposition
Les fonctions exponentielles de base $q > 0$ sont dérivables et positives. Elles sont strictement croissantes quand $q > 1$ et strictement décroissantes quand $q < 1$. Lorsque $q = 1$, la fonction est constante de valeur 1.

Propriété
Soit f_q la fonction exponentielle de base $q > 0$. On a : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f_q(x+y) = f_q(x) \cdot f_q(y)$, et vu que $f_q(0) = 1$, on a aussi $\forall x \in \mathbb{R}, f_q(-x) = \frac{1}{f_q(x)}$.

Propriété
Soit $q > 0$. Le produit $f_q \cdot f_{\frac{1}{q}}$ est la fonction constante 1. On a aussi $\forall x, y \in \mathbb{R}, f_q(x \cdot y) = (f_q(x))^y = (f_q(y))^x = f_{f_q(x)}(y) = f_{f_q(y)}(x)$.

Remarque : Ces propriétés sont évidentes lorsqu'on écrit $f_q(x) = q^x$. Cependant, des erreurs sont si faciles à faire qu'il est bon d'insister sur la « transformation » de $+$ en $\cdot$ et de $\cdot$ en puissance [8].

Définition
Le taux d'évolution en % d'une fonction est défini par $100 \cdot \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$. Il s'agit de la variation relative de la fonction sur une unité. Dans le cas d'une fonction exponentielle de base q, le taux d'évolution est de $100 \cdot (q-1)$.

6. les fonctions usuelles le sont
7. plutôt du graphe de cette fonction, mais sommes-nous à un abus près ?
8. notion totalement hors-programme : une fonction exponentielle est un morphisme du groupe additif des réels dans le groupe multiplicatif des réels strictement positifs

Propriété
La dérivée de la fonction exponentielle de la base q pourra être exprimée à l'aide d'une notion de la section suivante. Elle a la propriété suivante : le rapport $\frac{f_q'(x)}{f_q(x)}$ est constant et vaut en particulier $f_q'(0)$.

Remarque : La notion d'équation différentielle, étudiée en TS, trouve de nombreuses applications en sciences.
Une équation différentielle fait intervenir des fonctions en guise d'inconnues, et au lieu de considérer des puissances d'inconnues, on considère des dérivées successives de fonctions. Il s'avère que la résolution fait apparaître de nombreuses analogies, et la similarité est encore plus forte entre les équations différentielles et les équations, concernant les suites, de type $u_{n+2} = a \cdot u_{n+1} + b \cdot u_n + c$.
Une fonction f est solution de l'équation différentielle $f' = a \cdot f$ si, et seulement si, f est le produit par n'importe quel réel k de l'unique fonction exponentielle f_q vérifiant $f_q'(0) = a$. Le réel k est alors $f_q(0)$.

Définition
L'unique valeur de q telle que le rapport $\frac{f_q'(x)}{f_q(x)}$ soit de 1 est notée e et appelée nombre d'Euler. Ce nombre vaut environ $2,718$.

Remarque : Le nombre e a de multiples propriétés intéressantes. On le citera notamment en tant que limite de deux suites.
- 1 ; $1+\frac{1}{1}$; $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}$; $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$; $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$; ...
- $(1+1)^1$; $(1+\frac{1}{2})^2$; $(1+\frac{1}{3})^3$; $(1+\frac{1}{4})^4$; $(1+\frac{1}{5})^5$; ...

Remarque : Concernant cette dernière suite, on dispose d'une propriété plus forte encore, à savoir que la limite de la fonction $(1+\frac{a}{x})^x$ pour $x \to +\infty$ est e^a. Pour $a = -1$, on obtient $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$, qui correspond à la limite de la probabilité de qu'un événement de probabilité $\frac{1}{n}$ ne se produise pas en n essais. Par exemple, ne pas obtenir 42 après 100 lancers d'un dé à 100 faces a déjà une probabilité très proche de $\frac{1}{e}$: environ $0,3660$ contre $0,3679$.

Propriété
La fonction $f_e : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}\right.$ est donc l'unique fonction, à multiplication par un réel près, qui soit égale à sa dérivée. Elle est strictement convexe, strictement croissante et strictement positive. [9] On l'appelle simplement fonction exponentielle et on la note exp.

Propriété
Conséquences des propriétés précédentes : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $e^x = e^y$ si, et seulement si, $x = y$. Ceci vaut pour toutes les fonctions exponentielles de base $\neq 1$.
En outre, $e^x > e^y$ si, et seulement si, $x > y$.
Enfin, les limites de la fonction exponentielle en $-\infty$ et $+\infty$ étant respectivement 0 et $+\infty$, pour tout réel strictement positif z, il existe un unique réel x tel que $z = e^x$.

Remarque : Les valeurs notables de la fonction exponentielle sont à mémoriser. On a $\exp(-1) = \frac{1}{e}$, $\exp(0) = 1$ et $\exp(1) = e$.

Propriété
Une conséquence de la formule de dérivation de la composée : la dérivée de $\exp(f(x))$ est $f'(x)\cdot \exp(f(x))$. Ainsi, par positivité de l'exponentielle, une fonction et son exponentielle ont les mêmes variations.

Propriété
Toute fonction exponentielle est la composée de la fonction exponentielle et d'un produit. Le produit à faire apparaîtra grâce aux notions introduites dans la section suivante.

9. Ces trois propriétés sont partagées par toutes les fonctions exponentielles de base > 1, les fonctions exponentielles de base entre 0 et 1 exclus étant strictement décroissantes et, elles aussi, strictement convexes et strictement positives.

3 Fonction logarithme népérien

Définition
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ (on rappelle que $\mathbb{R}_+^*$, nommé « r étoile plus » [10] est l'ensemble des réels strictement positif). On appelle logarithme népérien de x et on note $\ln x$ l'unique réel y tel que $\exp(y) = x$. La fonction logarithme népérien est donc la réciproque de la fonction exponentielle, par conséquent leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété
Les valeurs notables de la fonction logarithme népérien, qui sont elles aussi à mémoriser, découlent de sa définition : $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln \frac{1}{e} = -1$.
La limite de $\ln x$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures est $-\infty$.

Propriété
Les propriétés de la fonction exponentielle entraînent que $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$:
- $\ln(x \cdot y) = (\ln x) + (\ln y)$;
- $\ln \frac{1}{y} = -\ln y$;
- $\ln \frac{x}{y} = (\ln x) - (\ln y)$;
- $\ln(x^n) = n \cdot \ln x$.

Propriété
La fonction logarithme népérien est strictement croissante, donc $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, (\ln x = \ln y \Rightarrow x = y)$.
La fonction logarithme népérien est continue et même dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \frac{1}{x}$.
Puisque cette dérivée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction logarithme népérien est strictement concave.

Propriété
Les fonctions logarithme népérien et exponentielle vérifient $\ln x < x < e^x$ sur leurs ensembles de définition.

Définition
La fonction logarithme en base a, pour $a > 0$, est notée $\log_a$ et définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\log_a(x)$ est l'unique réel y tel que $a^y = x$.

Propriété
Pour tout réel a, les fonctions log_a et $\frac{1}{\ln a} \ln$ sont égales.

Remarque : Si la base de l'exponentielle est inconnue…
Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. L'équation $x^n = k$ a une unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$: $k^{\frac{1}{n}}$, la racine n-ième de k.
Utilité : trouver la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes non consécutifs (espacés de n).
En outre, si on cherche un taux moyen d'évolution d'une fonction f, c'est-à-dire la valeur t telle que $\frac{f(x+1)-f(x)}{f(x)} = t$, à partir du coefficient multiplicateur global sur n années $CM := \frac{f(x+n)}{f(x)}$, on a $t = CM^{\frac{1}{n}} - 1$.

10. et non pas « r plus étoile » qui est une aberration mathématique que mêmes les meilleurs professeurs profèrent