Fiche méthode pour les exercices de mathématiques

Julien Reichert

Le but de cette fiche est de donner la méthode générale de résolution de n'importe quel exercice de mathématiques du bac. Il s'agit de ne plus être bloqué devant un énoncé court et présentant un format relativement standard.

1 Suites

Énoncé : Donner le terme général de la suite (u_n).
Méthode : Utiliser les formules du cours, la nature de la suite est normalement déjà donnée ainsi que toutes les informations nécessaires.

Énoncé : Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.
Méthode : Calculer $u_{n+1} - u_n$, montrer que c'est une constante, invoquer la définition.

Énoncé : Montrer que la suite (u_n) est géométrique.
Méthode : Calculer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, montrer que c'est une constante, invoquer la définition.

Énoncé : Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = qu_n + r$ [q et r sont alors donnés]. En posant (v_n) la suite telle que $v_n = u_n+$[une valeur donnée], montrer que (v_n) est une suite géométrique, en déduire son terme général et celui de (u_n).
Méthode : Ce genre d'énoncé est typique et recouvre en général plusieurs questions, pour environ la moitié des points d'un exercice du bac. La méthode est toujours la même :
- On écrit $v_n = u_n + k$ (avec le k donné).
- On écrit $v_{n+1} = u_{n+1} + k$.
- On écrit $v_{n+1} = qu_n + r + k$.
- On se rend compte que $r + k$ n'est autre que qk.
- On écrit $v_{n+1} = qu_n + qk = q(u_n + k) = qv_n$.
- On en déduit que (v_n) est géométrique de raison q.
- On calcule $v_0 = u_0 + k$, où u_0 est normalement donné lui aussi.
- On applique la formule : $v_n = v_0q^n = (u_0 + k)q^n$.
- On écrit $u_n = v_n - k = (u_0 + k)q^n - k$.

Énoncé : À partir de quel rang a-t-on <inégalité faisant intervenir une suite géométrique ou arithmético-géométrique u_n >?
Méthode : Il s'agit de partir de cette inégalité et de transformer successivement l'inéquation, en introduisant au bon moment un logarithme. Attention, à la fin il faut d'après l'énoncé que l'inéquation soit $n >$ (rang) et que la phrase de conclusion donne le plus petit entier strictement supérieur à la solution réelle de l'inéquation.

2 Fonctions

Énoncé : Montrer que la fonction f est (strictement) croissante / décroissante.
Méthode : On dérive f et on cherche le signe de f'. Il y a parfois lieu d'utiliser la règle des signes du trinôme, parfois on sait que c'est toujours de même signe (une exponentielle, un carré, quand l'ensemble de définition est particulier, ...).

Remarque : L'énoncé peut aussi demander les variations de f sans plus de précisions.

Remarque : De part et d'autre des abscisses pour lesquelles f' s'annule, on peut déterminer le signe en calculant pour une valeur particulière dans le bon intervalle, mais le correcteur préfère habituellement qu'on fasse une résolution d'inéquation.

Énoncé : Déterminer pour quelle valeur de x <une valeur représentée par une fonction> est minimal(e).
Méthode : On cherche les variations de la fonction, on lit les minima locaux sur le tableau et on prend l'abscisse correspondant au plus petit minimum. Analogue si on cherche le maximum.

Énoncé : Montrer que la fonction f est (strictement) concave / convexe.
Méthode : On cherche cette fois le signe de f''.

Énoncé : Montrer que l'équation $f(x) = k$ (où k est n'importe quel réel) admet [nombre] solutions sur [intervalle].
Méthode : Cette méthode s'applique surtout si ensuite on demande des valeurs approximatives pour les solutions. On fait le tableau de variations de f, qui aura souvent déjà été demandé, puis sur chaque intervalle où f est strictement monotone, il faut les éléments suivants :

- On signale une fois pour toutes (mais à chaque question de ce type) que la fonction est continue (ne pas le faire coûtera quasiment à coup sûr une partie des points).
- On signale une fois pour toutes (idem) qu'on applique le théorème des valeurs intermédiaires (idem).
- On calcule $f(a)$ et $f(b)$, où a et b sont les bornes de l'intervalle qu'on est en train de considérer. Si k est entre les deux valeurs, alors il y a une solution, sinon il n'y en a pas.
- On compte le nombre total de solutions.

Remarque : L'énoncé demandera parfois de déterminer le nombre de solutions sans donner la réponse à retrouver.

Remarque : Lorsque l'équation $f(x) = k$ se résout par les moyens habituels, il n'y a pas lieu de faire tout ceci. Par exemple une équation du type $e^{2x} - 5 = 0$. Mais dans ce cas l'énoncé demandera habituellement la valeur exacte de l'unique solution.

Énoncé : QCM sur les fonctions
Méthode : Il s'agit de vérifier que les réponses proposées sont correctes ou du moins vraisemblables. Ainsi, quand on demande à quelle autre expression une expression dépendant de x est égale, prendre un petit nombre de valeurs pas trop évidentes permet souvent de trancher.

3 Calcul intégral

Énoncé : Donner **une** primitive de f.
Méthode : On applique les formules du cours pour trouver une primitive possible. Il n'est pas nécessaire de mettre $+k$ à la fin, sauf si l'énoncé demande de calculer **toutes les** primitives de f. Vérifier que la dérivée de la fonction obtenue est bien f est recommandé, au moins au brouillon.

Énoncé : Donner la primitive F de f telle que $F(a) = b$ (les réels a et b sont donnés dans l'énoncé).
Méthode : Une fois toutes les primitives de f possibles données, on résout l'équation d'inconnue k obtenue en remplaçant x par a dans l'expression de F et en mettant $= b$ à la fin.

Énoncé : Montrer (ou vérifier) que la fonction F (donnée dans l'énoncé) est une primitive de f.
Méthode : Si les formules du cours ne permettent pas de trouver une primitive de f, on ne peut s'en sortir qu'en dérivant F. De toute façon, cette méthode est permise est plus facile, alors autant en profiter.

Énoncé : Calculer la moyenne de f entre a et b (les réels a et b sont donnés dans l'énoncé)
Méthode : On applique la formule du cours : cette moyenne vaut $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. L'énoncé est parfois sous la forme d'un problème avec mise en contexte, il faut traduire les phrases en termes mathématiques (attention, parfois l'unité de l'énoncé n'est pas celle à employer dans la formule, il y a eu suffisamment d'exemples dans les DST et DM).

4 Probabilités

Énoncé : Faire un arbre de probabilités.
Méthode : On repère les données de l'énoncé, qui sont pour la plupart des probabilités conditionnelles. L'ordre des événements dépendra des probabilités « sachant que ». Il s'agit d'attribuer aux branches les valeurs imposées, ou dans des cas plus difficiles des valeurs qui s'en déduisent.

Remarque : La plupart du temps, il s'agira de compléter un arbre déjà commencé.

Énoncé : Calculer une probabilité faisant intervenir un ou deux événement(s).
Méthode : C'est une application immédiate de formules du cours, et souvent la réponse à une question s'utilise dans la suivante. Au passage, les formules de probabilités conditionnelles restent valables pour les variables aléatoires continues.

Remarque : L'ordre classique pour un arbre avec par exemple les événements A et $\bar{A}$ au premier niveau puis les événements B et $\bar{B}$ à chaque branche est :
- Reporter sur l'arbre $P(A), P_A(B), P_{\bar{A}}(B)$ et les complémenter sur les autres branches.
- Calculer $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$. [Formule : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$]
- Calculer $P(B)$ [Formule : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$]
- Calculer $P_B(A)$ [Formule : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$]

Énoncé : Déterminer la probabilité de réussir k fois [k donné] sur n épreuves [n donné] indépendantes et identiques de probabilité p [p donnée ou calculée précédemment].
Méthode : On reconnaît les conditions de la loi binomiale. La probabilité recherchée s'obtient par la formule du cours $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Énoncé : Calculer l'espérance d'une variable aléatoire.
Méthode : Il est essentiel de bien avoir en tête dans quel cadre la question est posée :
- Si la variable aléatoire est discrète, c'est-à-dire que son ensemble de valeurs est dénombrable (il n'y a même aucune raison qu'il ne soit pas fini, au bac ES), alors l'espérance est la moyenne des valeurs pondérées par leur probabilité respective. En clair, la somme des produits $kP(X = k)$ pour toutes les issues possibles k.
- Si la variable aléatoire est continue, c'est-à-dire que son ensemble de valeurs est indénombrable (un intervalle, ou exceptionnellement une réunion d'intervalles), alors l'espérance est la moyenne au sens du calcul intégral de la fonction $xf(x)$, où f est la fonction densité associée à la variable aléatoire. Il est possible de répondre immédiatement dans le cas de la loi uniforme continue : l'espérance est le milieu de l'intervalle dans lequel X prend ses valeurs [1].
- Dans le cas d'une variable aléatoire qui suit la loi normale, il est possible de lire graphiquement la moyenne lorsque la courbe est donnée dans l'énoncé : c'est l'abscisse du sommet de la « cloche ». De même, si on annonce que la probabilité que X soit supérieur à une certaine valeur est $0,5$, c'est que la valeur en question est exactement l'espérance.

Énoncé : Calculer l'écart-type d'une variable aléatoire. **[Énoncé très rare a priori]**
Méthode : Il est impensable de faire calculer cela pour une variable aléatoire discrète, mais dans le cas discret comme dans le cas continu ces deux formules sont valides : $\sigma(X) = \sqrt{E((X - E(X))^2)} = \sqrt{E(X^2) - E(X)^2}$. Cette valeur se retrouve à l'aide d'une résolution d'équation pour une variable aléatoire X qui suit une loi normale. En effet, si on dispose par exemple de l'espérance μ de X, ainsi que d'une probabilité que X soit entre $\mu - k$ et $\mu + k$ pour un certain k, la probabilité en question sera usuellement une de celles qu'il faut apprendre par cœur, et l'écart-type se déduira aisément à partir de k.

Énoncé : Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale précisée dans l'énoncé. Calculer la probabilité que X soit dans un intervalle précisé dans l'énoncé.
Méthode : La plupart du temps, l'intervalle ne fait intervenir que l'espérance et de -3 à 3 fois l'écart-type (mais multiplié par un nombre entier). Il s'agit de ressortir par cœur une valeur du cours. Autrement, la calculatrice dispose d'une fonction qui donne le résultat, qui n'est alors même pas à justifier (normalement, l'énoncé contiendra « à l'aide de la calculatrice »).

Énoncé : Une question d'échantillonnage...
Méthode : Les questions de ce genre sont souvent relativement floues, et il s'agit de procéder à une traduction vers les mathématiques. D'abord, on repère les mots-clés : que représente ou vaut p, que vaut n, peut-on calculer f ? Ensuite, on annonce qu'on est dans les conditions usuelles (on a forcément soit une valeur de p, soit une hypothèse proposée par l'énoncé pour cette valeur, soit une valeur de f, et on s'adapte) en précisant ces conditions. On peut alors calculer l'intervalle de fluctuation ou de confiance, suivant le cas (l'énoncé précise d'habitude lequel des deux doit être calculé). Finalement, on déduit de l'appartenance ou non de f ou p, respectivement, à l'intervalle déterminé, ce qu'il faut déduire, en utilisant le bon sens.

1. S'il y a plusieurs intervalles distincts, l'espérance est la moyenne des milieux d'intervalles pondérés par leur taille respective...et les terminales de la France entière déclenchent une révolution.