

Chapitre 1 : Suites numériques

Julien REICHERT

Rappel : une suite numérique est une séquence, finie ou infinie, de nombres réels.

Définition

Une suite est dite croissante si toutes les différences de deux termes consécutifs sont positives.

Une suite est dite décroissante si toutes les différences de deux termes consécutifs sont négatives.

Les suites croissantes et décroissantes sont dites monotones.

Une suite est dite strictement croissante si toutes les différences de deux termes consécutifs sont strictement positives.

Une suite est dite strictement décroissante si toutes les différences de deux termes consécutifs sont strictement négatives.

Les suites strictement croissantes et strictement décroissantes sont dites strictement monotones.

Exemples :

- La suite des carrés des entiers est strictement croissante, ses premiers termes sont $0 ; 1 ; 4 ; 9 ; \dots$
- La suite des inverses des entiers non nuls est strictement décroissante, ses premiers termes sont $1 ; 0,5 ; 0,333\dots ; 0,25 ; \dots$
- N'importe quelle suite dont les trois premiers termes sont $4 ; 2 ; 10$ n'est ni croissante ni décroissante.

Remarque : Une suite à la fois croissante et décroissante est dite constante.

Définition

Une suite arithmétique de raison r se caractérise par le fait que la différence de deux termes consécutifs est la constante r . La relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = u_n + r$ ou, de manière équivalente, $u_{n+1} - u_n = r$.

Proposition

Le terme général d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 + r \cdot n$.

Exemples :

- Les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2 sont $0 ; 2 ; 4 ; 6 ; \dots$
- Les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 6 et de raison -3 , 3 sont $6 ; 2, 7 ; -0,6 ; -3, 9 ; \dots$

Proposition

La somme des termes du rang 0 au rang n d'une suite arithmétique de raison r est

$$\sum_{i=0}^n u_i = \frac{u_0 + u_n}{2} \cdot (n + 1)$$

et, plus généralement, la somme des termes du rang j au rang k (avec $j \leq k$) d'une suite arithmétique de raison r est $\sum_{i=j}^k u_i = \frac{u_j + u_k}{2} \cdot (k - j + 1)$. Pour mémoire : moyenne des termes extrêmes \times nombre de termes.

Démonstration. Écrire deux fois la somme, dans les deux sens, l'une sur l'autre, puis sommer par colonnes. \square

Exemples :

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

— Si $u_n = 5 - 3n$, $\sum_{i=2}^6 u_i = \frac{u_2+u_6}{2} \cdot (6-2+1) = \frac{(5-3\cdot 2)+(5-3\cdot 6)}{2} \cdot 5 = \dots = -35$.

Proposition

Une suite arithmétique est croissante si sa raison est positive et décroissante si sa raison est négative. Si la raison n'est pas nulle, la suite est de plus strictement monotone.

Définition

Une suite géométrique de raison q se caractérise par le fait que le quotient de deux termes consécutifs est la constante q . La relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = u_n \cdot q$ ou, de manière équivalente si $u_n \neq 0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

Proposition

Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est $u_n = u_0 \cdot q^n$.

Remarque : Dans le cas où la raison est 0, on a par convention $0^0 = 1$.

Exemples :

- Les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 sont 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; ...
- Les premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 25 et de raison $-\frac{1}{5}$ sont 25 ; -5 ; 1 ; -0,2 ; ...

Proposition

La somme des termes du rang 0 au rang n d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est

$$\sum_{i=0}^n u_i = u_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = u_0 \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

et, plus généralement, la somme des termes du rang j au rang k (avec $j \leq k$) d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est $\sum_{i=j}^k u_i = u_j \cdot \frac{1 - q^{j-i+1}}{1 - q} = u_j \cdot \frac{q^{j-i+1} - 1}{q - 1}$.

La somme de n termes (par exemple du rang 0 au rang $n - 1$) d'une suite géométrique de raison 1 (donc constante) est n fois le terme général commun.

Démonstration. Écrire la somme sur une ligne, puis la somme des termes multipliés par $-q$ sur la ligne du dessous avec un décalage sur la ligne du dessous ; en additionnant les deux lignes, il ne reste que u_0 et $-u_0 \cdot q^{n+1}$ (dans le cas de la première formule). L'exposant dans la formule est le nombre de termes, le facteur à gauche de la fraction est le premier terme de la somme. \square

Exemples :

- $1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- Si $u_n = \frac{150}{5^n}$, $\sum_{i=1}^4 u_i = u_1 \frac{1 - \frac{1}{5}^4}{1 - \frac{1}{5}} = 30 \cdot \frac{1 - \frac{1}{625}}{\frac{4}{5}} = \dots = \frac{936}{25}$.

Proposition

Une suite géométrique est croissante si, et seulement si :

- sa raison est supérieure à 1 et son premier terme est positif ;
- ou sa raison est comprise entre 0 et 1 et son premier terme est négatif.

Une suite géométrique est décroissante si, et seulement si :

- sa raison est supérieure à 1 et son premier terme est négatif ;
- ou sa raison est comprise entre 0 et 1 et son premier terme est positif.

Remarque : si la raison d'une suite géométrique est négative, alors la suite est dite alternée et ses termes changent de signe à chaque fois. Si la raison est nulle, c'est également le cas, puisque zéro est à la fois positif et négatif. La variation de la suite dépend des deux premiers termes. On exclut de la proposition le cas où le premier terme est zéro, car définir la raison n'a alors pas de sens.

Proposition (Critère supplémentaire pour déterminer la variation d'une suite positive)

Une suite dont tous les termes sont strictement positifs est croissante si tous les rapports de deux termes consécutifs

sont supérieurs à 1.

Une suite dont tous les termes sont strictement positifs est décroissante si tous les rapports de deux termes consécutifs sont inférieurs à 1.

Proposition

La limite d'une suite arithmétique de raison strictement positive est $+\infty$. La limite d'une suite arithmétique de raison strictement négative est $-\infty$. La limite d'une suite arithmétique de raison nulle est la valeur commune de tous les termes.

Proposition

La limite d'une suite géométrique de raison supérieure à 1 est $+\infty$ si le premier terme est strictement positif et $-\infty$ si le premier terme est strictement négatif. Si le premier terme d'une suite géométrique est zéro, la limite de la suite est la valeur commune de tous les termes... zéro. La limite d'une suite géométrique de raison 1 est la valeur commune de tous les termes. La limite d'une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1 est 0 . Une suite géométrique de raison inférieure à -1 n'a pas de limite.¹

Proposition

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q strictement comprise entre -1 et 1 et de premier terme u_0 . Pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont compris entre $-\varepsilon$ et ε . Ce réel se calcule principalement de deux façons² : par un algorithme ou par un logarithme (chapitre ultérieur).

Définition

Une suite arithmético-géométrique se caractérise par une relation de récurrence liant deux termes consécutifs. Cette relation est de la forme $u_{n+1} = q \cdot u_n + r$.

Remarque : Si $q = 1$, la suite est arithmétique ; si $r = 0$, la suite est géométrique.

Proposition

Le terme général d'une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = q \cdot u_n + r$ est $u_n = u_0 \cdot q^n + r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$ si $q \neq 1$ et $u_n = u_0 + r \cdot n$ si $q = 1$.

Démonstration. Pour calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique u_n non arithmétique : on étudie la suite géométrique d'appui $v_n = u_n + \frac{r}{q-1}$. En réécrivant la relation de récurrence sur u_n , on remarque que v_n est géométrique de raison q . Son terme général est $v_n = v_0 \cdot q^n = (u_0 + \frac{r}{q-1}) \cdot q^n$, et donc on en déduit $u_n = (u_0 + \frac{r}{q-1}) \cdot q^n - \frac{r}{q-1}$, qui se réécrit en le résultat annoncé. \square

Remarques :

- Pour calculer la somme des termes d'une suite arithmético-géométrique, on utilise plutôt l'expression en fin de démonstration. L'expression donnée dans la proposition est donnée uniquement pour voir en parallèle les deux cas $q \neq 1$ et $q = 1$.
- On retrouve partiellement l'expression de la somme des termes d'une suite géométrique dans le terme général d'une suite arithmético-géométrique. En fait, c'est une conséquence de la propriété suivante des suites arithmético-géométriques : la suite définie par la différence de deux termes consécutifs d'une suite arithmético-géométrique est une suite géométrique.

Proposition

Une suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = q \cdot u_n + r$ est monotone si, et seulement si, $q \geq 0$. Sa variation se détermine en comparant par exemple u_1 et u_0 .

Démonstration. L'expression $u_n = (u_0 + \frac{r}{q-1}) \cdot q^n - \frac{r}{q-1}$ du terme général laisse apparaître une partie constante à droite et une partie variable qui est le terme d'une suite géométrique à gauche. Or, une suite géométrique est

1. Notion totalement hors-programme : une valeur d'adhérence d'une suite est un réel dont une infinité de valeurs s'approchent aussi près que l'on veut. Une suite géométrique de raison -1 a deux valeurs d'adhérence : les deux valeurs prises alternativement par les termes de la suite. Une limite est par définition une valeur d'adhérence, et c'est alors la seule qui existe.

2. notez que ce sont de belles anagrammes (et notez le genre du mot « anagramme »)

monotone si, et seulement si, sa raison est positive. Concernant la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut ajouter qu'elle est croissante si, et seulement si :

- $q > 1$ et $u_0 \geq -\frac{r}{q-1}$
- ou $0 \leq q < 1$ et $u_0 \leq -\frac{r}{q-1}$
- ou $q = 1$ et $r \geq 0$

et qu'elle est décroissante si, et seulement si :

- $q > 1$ et $u_0 \leq -\frac{r}{q-1}$
- ou $0 \leq q < 1$ et $u_0 \geq -\frac{r}{q-1}$
- ou $q = 1$ et $r \leq 0$

et en particulier elle est constante lorsque $u_0 = -\frac{r}{q-1}$.

□