Correction du TD 14

Julien Reichert

Exercice 1

Considérons un graphe non orienté non vide sans sommet de degré zéro (ceux-ci ne changeraient rien à la condition car ils sont ignorés ni à l'existence d'une chaîne eulérienne car ils ne seraient pas visités).

Alors tout sommet a au moins une arête incidente et doit être traversé par une éventuelle chaîne eulérienne, donc l'existence implique la connexité. De plus, considérons une chaîne eulérienne et suivons-la depuis une de ses extrémités comme s'il s'agissait d'un chemin. Alors on entre dans et on sort ensuite immédiatement de chaque sommet à part les deux extrémités, ce qui nécessite à chaque fois un nombre pair d'arêtes incidentes. Passer par tous les arcs suppose alors un degré pair pour tous les sommets, là encore sauf les deux extrémités. Pour celles-ci, le degré doit alors être impair s'il s'agit de deux sommets différents, et pair si la chaîne est en fait un cycle.

Concernant la réciproque, si les conditions sont réunies, on peut prouver l'existence d'une chaîne eulérienne en la construisant, soit par un algorithme itératif qui doit cependant compléter en cas de blocage la chaîne obtenue par des cycles jusqu'à avoir couvert toutes les arêtes, soit par un algorithme récursif, suggérant qu'une preuve par récurrence forte sur le nombre d'arêtes existe.

En l'occurrence, pour cette récurrence, il faudrait changer la formulation et dire que toute composante connexe d'un graphe dont les sommets vérifient les conditions sur le degré admet une chaîne eulérienne sur le sous-graphe induit, dont les extrémités vérifient les propriétés de la proposition à prouver. Ceci est vrai quand il n'y a pas d'arête (ou une seule), et si c'est vrai pour un nombre d'arêtes inférieur ou égal à un certain entier naturel n, considérons une composante connexe ayant $n+1$ arêtes, et prenons n'importe quelle arête dont au moins une extrémité est de degré impair (s'il n'y a pas de sommet de degré impair, on prend n'importe quelle arête).

Imaginons qu'on retire cette arête. (i) Soit la composante connexe est scindée en deux composantes connexes (l'arête était ce qu'on appelle un *pont*), et par distinction des cas sur les nouveaux degrés des extrémités de l'arête retirée en éliminant les cas impossibles sur les deux composantes connexes obtenues on peut établir l'existence d'une chaîne eulérienne dans chaque composante connexe, ayant de plus la propriété qu'une extrémité est dans chaque composante connexe le sommet lui appartenant et ayant perdu une arête. Ceci donne par recombinaison une chaîne eulérienne pour la composante connexe de départ. (ii) Soit la composante connexe reste connexe. Alors on peut trouver (là encore par distinction des cas sur les degrés) une chaîne eulérienne dont au moins une extrémité est un sommet ayant perdu une arête, d'où le prolongement pour la composante connexe de départ.

Exercice 2

La preuve est identique à celle de la proposition précédente, à ceci près qu'on ne peut partir que d'une extrémité pour considérer un chemin eulérien, et l'orientation est imposée pour l'arc qu'on retire dans la récurrence forte.

Exercice 3

La preuve se fait par récurrence : on initialise pour $n = 0$ (la matrice identité donne les chemins de taille 0 consistant à rester sur place) ou $n = 1$ (les chemins de taille 1 sont composés d'un seul arc).

Concernant l'hérédité, supposons la propriété vraie au rang n, posons $N = M^n$ et considérons la matrice $M^{n+1} = NM$, dont la cellule à la ligne i et la colonne j est donnée par la formule $\sum_{k=1}^{n} N_{i,k}M_{k,j}$, soit la somme sur l'ensemble des indices k des sommets du nombre de chemins de taille n (hypothèse de récurrence) du sommet d'indice i au sommet d'indice k, ce nombre étant incorporé si et seulement si le sommet d'indice k est relié au sommet d'indice j par un arc (multiplication par 1, et par 0 sinon).

Or, un chemin de taille $n+1$ se décompose aussi en un chemin de taille n (finissant sur un certain sommet) prolongé par un arc, d'où l'équivalence.

Exercice 4

La preuve découle de la preuve qui précède, en remplaçant la somme par la disjonction et le produit par la conjonction.

On peut aussi observer que le produit booléen s'obtient à partir du produit usuel en remplaçant tout ce qui n'est pas nul par 1, et d'autre part qu'il existe un chemin si et seulement si le nombre de chemins n'est pas nul.

Exercice 5

Supposons que le graphe ne soit pas vide et que tout sommet admette un prédécesseur et construisons une suite de sommets à partir de n'importe quel sommet de départ s_0 et en sélectionnant pour tout n n'importe quel prédécesseur s_{n+1} de s_n.

Une telle suite est possible pour n'importe quelle taille (on note d'ores et déjà que sa lecture à l'envers donne un chemin), et d'après le principe des tiroirs si le nombre de sommets dans la suite est strictement supérieur au nombre de sommets du graphes il existe au moins un sommet qui se répète. En prenant la sous-suite délimitée par une répétition, sa lecture à l'envers correspond à un circuit.

Exercice 6

Remarque initiale : un cycle trivial consiste à suivre immédiatement une arête par la même arête de sorte à revenir sur un sommet. Pour certains auteurs, cela ne mérite même pas d'être appelé un cycle car la définition des chemins / chaînes / etc. concerne une suite d'arêtes ou arcs et non une suite de sommets.

Résultat très important : pour qu'un graphe dont le nombre de sommets est noté n (> 0) soit connexe, le nombre d'arêtes ne peut pas être strictement inférieur à $n - 1$. Cela se prouve très facilement en donnant l'intuition de la structure *union-find* au programme de la deuxième année : sans arête, il y a n composantes connexes, et chaque arête peut éventuellement fusionner deux composantes connexes.

Soit G un graphe non orienté et non vide dont le nombre de sommets est noté n.

Première preuve (pas de cycle non trivial et connexité implique $n - 1$ arêtes) :
Supposons que G soit connexe et ait au moins n arêtes. Montrons que G a un cycle non trivial. En reprenant l'idée de la preuve que la connexité nécessite au moins $n - 1$ arêtes, considérons une énumération des arêtes comme si elles étaient ajoutées l'une après l'autre. Si une arête fusionne deux composantes connexes, il n'y a rien à signaler. Si ce n'est pas le cas, c'est que les deux extrémités étaient déjà reliées par une chaîne. Ajouter l'arête à une telle chaîne donne un cycle, ce qui conclut la preuve car ce cas se produit au moins une fois au plus tard à la n-ième arête car le nombre de composantes connexes ne peut diminuer strictement que $n - 1$ fois.

Deuxième preuve (pas de cycle non trivial et $n - 1$ arêtes implique connexité) :
C'est une adaptation des deux preuves précédentes : puisqu'aucune arête ne produit de cycle, chacune diminue d'un le nombre de composantes connexes.

Troisième preuve (connexité et $n - 1$ arêtes implique pas de cycle non trivial) :
Même principe une fois de plus...

Exercice 7

Soient G un graphe (pondéré ou non), u, v et w trois sommets pas forcément différents deux à deux et C un chemin optimal (en valeur ou en longueur suivant le cas pour G) de u à w.

Soient C_1 le sous-chemin de C entre u et la première occurrence (normalement la seule...) de v et C_2 le reste (sous-chemin de C entre v et w).

Si C_1 n'est pas optimal, alors il existe un chemin C' de u à v qui est de poids / longueur inférieur(e), mais alors coller C' à C_2 contredit l'optimalité de C. De même pour C_2.

Pour l'absence de réciproque, il suffit de prendre $u = w$ mais v différent et considérer qu'il n'existe pas de circuit de poids strictement négatif autour du sommet u.

Exercice 8

On prend pour variant le nombre de sommets moins le nombre de fermés, qui diminue strictement à chaque tour de boucle / appel récursif (même pas imbrique) dans les versions en pseudo-code du cours.

Exercice 9

Une possibilité est de faire une récurrence sur la distance au sommet de référence (cas de base 0 pour celui-ci) pour les sommets accessibles, en signalant qu'un sommet mis en attente (file ou appel récursif / pile) finit par être mis dans l'objet renvoyé et qu'un sommet était soit déjà en attente soit mis en attente lorsque chacun de ses prédécesseurs est traité, en particulier celui qui permet de déterminer sa distance au sommet de référence. On en profite pour prouver la réciproque en signalant qu'un sommet n'est mis en attente que lors de sa découverte, celle-ci ayant lieu au moment où un prédécesseur est traité (ou s'il s'agit du sommet de référence) d'où l'hérédité (ici la récurrence peut porter sur le nombre de sommets traités, si vraiment on veut en faire une à part).

Exercice 10

L'idée du graphe miroir est qu'il existe un chemin de s à t dans celui-ci si et seulement s'il existe un chemin de t à s dans le graphe de départ.

Un graphe orienté est fortement connexe si, et seulement si, on peut aller de tout sommet à tout autre sommet par un chemin. Le parcours depuis n'importe quel sommet s permet de confirmer qu'on peut aller de s à tout sommet (ou non...), et le parcours dans le graphe miroir depuis s permet de confirmer qu'on peut aller de tout sommet à s (ou non...). Si les deux tests sont réussis, alors on peut aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre en passant par s. Si un des tests échoue, alors on a trouvé un contre-exemple à la propriété recherchée.

Exercice 11

Dans un parcours, un sommet est mis dans l'objet renvoyé lors de sa découverte, donc quand on sait qu'il existe un chemin depuis le sommet de référence (voir exercice 9) ou tout au début en ce qui concerne le sommet de référence. Si cette opération n'est pas effectuée suite à l'adaptation du parcours, alors il reste la possibilité de « découvrir » le sommet d'origine, ce qui permet de confirmer l'existence d'un circuit ayant pour départ et arrivée le sommet d'origine. Il suffit de tester tous les sommets jusqu'à détecter un tel sommet ou se rendre compte qu'il n'y a pas de circuit.

Exercice 12

Exercice 13

Exercice 14

Exercice 15

Exercice 16

Exercice 17