

Correction du TD 16

Julien Reichert

Dans toutes les preuves, on considère la syntaxe restreinte des formules, mais sans perte de généralité.

Exercice 1

On va faire la preuve directement pour tout ensemble inductif.

Soit un ensemble E obtenu à partir de E_0 (dénombrable) et en utilisant les règles C_i pour $i \in I$ (l'ensemble I étant dénombrable lui aussi) dont les arités respectives sont notées d_i (définition par le bas).

Alors on a $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}, E_{n+1} = E_n \cup \{C_i(x_1, \dots, x_{d_i}) \mid i \in I, x_1, \dots, x_{d_i} \in E_n\}$.

Soit E' le plus petit ensemble contenant E_0 et stable par l'application des règles C_i (définition par le haut). On montre par récurrence sur n que E' contient chaque E_n (initialisation : c'est la première hypothèse, hérédité : c'est la deuxième hypothèse et la construction de E_{n+1} à partir de E_n), donc leur réunion.

Réciproquement, E est un ensemble contenant E_0 et stable par l'application des règles C_i , donc E' , en tant que plus petit tel ensemble, est inclus dans E .

On conclut que les définitions par le haut et par le bas coïncident.

Exercice 2

On procède par induction structurelle : pour les formules de base, on est dans le premier cas donc la propriété est vraie, et pour les autres formules, celles-ci sont construites à partir d'un des opérateurs listés dans les deux autres cas et d'une ou deux sous-formules, pour lesquelles l'hypothèse d'induction s'applique.

Exercice 3

Soit I une interprétation. On cherche à construire \tilde{I} en tant que fonction prenant en argument une formule propositionnelle et retournant un booléen, dont la restriction aux variables est I .

En pratique, pour toute formule φ , on peut poser $\tilde{I}(\varphi) = b$ tel que $I, \varphi \models b$.

On a alors l'existence, par induction sur la formule :

- Si φ est \top ou \perp , la valeur est imposée.
- Si φ est réduite à une variable propositionnelle, par définition de la sémantique on a $\tilde{I}(\varphi) = I(\varphi)$.
- Si φ est obtenue à partir d'un connecteur et d'une ou deux autres formules, la construction proposée pour \tilde{I} respecte les règles de la sémantique dès lors que c'est vrai pour les sous-formules.

Concernant l'unicité, une autre façon de voir les choses est d'imaginer deux extensions différentes de l'interprétation et de considérer une formule minimale pour l'inclusion qui soit envoyée sur vrai par une extension et sur faux par l'autre. Mais alors cette formule ne peut pas être \top ni \perp ni une variable, car les valeurs sont imposées, et donc il s'agit d'une formule φ utilisant un connecteur et une ou deux sous-formules. Par hypothèse, les deux extensions de l'interprétation donnent la même valeur de vérité à la sous-formule / aux deux sous-formules. Dans ce cas, pour respecter la sémantique de la logique propositionnelle, il n'est pas possible de donner à la formule φ deux valeurs de vérité différentes.

Exercice 4

Il s'agit une fois de plus d'une induction structurelle. Sur l'ensemble des cas inductifs, deux interprétations différentes ne peuvent pas donner de résultats différents lorsqu'elles coïncident sur les sous-formules. Seuls les cas de base avec des variables les font intervenir. Or, si les deux interprétations donnent la même valeur pour toutes les variables apparaissant dans une formule, aucune divergence de résultat ne peut apparaître lors de l'évaluation de la formule en question.

En pratique, les deux derniers exercices montrent une forme de dualité, et tout provient de l'existence d'une fonction, qu'on nommera *evaluation*, prenant en argument une interprétation I et une formule φ , de sorte que $\text{evaluation}(I, \varphi) = b$ pour lequel $I, \varphi \models b$. Dans ce cas, l'exercice 3 considère la fonction partielle $\varphi \mapsto \text{evaluation}(I, \varphi)$ à I fixée et l'exercice 4 considère la fonction partielle $I \mapsto \text{evaluation}(I, \varphi)$ à φ fixée, et en restreignant les interprétations à l'ensemble des variables utilisées.

Exercice 5

On pourrait croire à une récurrence, mais c'est une fois de plus une induction structurelle.

Il s'agit d'étudier en parallèle l'évaluation de φ selon l'interprétation I' obtenue à partir de I selon les conditions du théorème et l'évaluation de $\varphi' := \varphi[p_1/\psi_1, \dots, p_n/\psi_n]$ selon l'interprétation I .

Lors de l'évaluation de φ selon I' , pour toute sous-formule rencontrée, soit il s'agit d'une des variables p_k , auquel cas en parallèle dans φ' on a ψ_k , et on a bien la valeur de vérité de p_k selon I' qui est la valeur de vérité de ψ_k selon I par construction, soit il s'agit d'un cas de base différent, auquel cas les deux interprétations s'accordent et on a de nouveau la même réponse, soit il s'agit d'un constructeur auquel cas le principe d'induction s'applique.

Exercice 6

La réciproque est triviale par la transitivité des implications.

Pour le sens direct, on procède par récurrence non pas sur n mais sur le nombre, noté k , de variables propositionnelles apparaissant dans φ en-dehors des n variables partagées avec ψ .

Si $k = 0$, alors on pose $\theta = \varphi$. Dans ce cas, $\varphi \Rightarrow \theta$ est évidemment une tautologie, ce qui fait qu'on peut confirmer directement que $\varphi \Rightarrow \psi$ est une tautologie si, et seulement si, $\theta \Rightarrow \psi$ en est une...

Pour passer de k à $k + 1$, on considère une formule φ dont une des $k + 1$ variables non partagées est notée x . Alors $\varphi[x/\top] \vee \varphi[x/\perp]$, notée φ' , n'a plus que k variables non partagées (et on remarque au passage que φ implique φ'). Si $\varphi \Rightarrow \psi$ est une tautologie, alors $\varphi[x/\top] \Rightarrow \psi$ et $\varphi[x/\perp] \Rightarrow \psi$ en sont aussi (considérer pour chaque interprétation la valeur de x , cela signalera quelle implication elle concerne, les deux formules ne dépendant plus de x elles-mêmes), d'où par une règle de déduction vue en cours $\varphi' \Rightarrow \psi$ aussi. On pose θ l'interpolante pour φ' (garantie par hypothèse de récurrence). Cette interpolante peut alors être utilisée pour φ (le même raisonnement dans l'autre sens prouve que $\varphi \Rightarrow \theta$ est une tautologie).

Exercice 7

En reprenant la preuve pour les formes normales disjonctives, on pose φ une formule propositionnelle. La formule $\neg\varphi$ admet en particulier elle aussi une formule équivalente en forme normale disjonctive, qu'on va noter $\bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j}$.

Alors les règles de déduction permettent de dire que φ est équivalente à $\neg(\bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j})$, c'est-à-dire à $\bigwedge_{i=1}^n (\neg \bigwedge_{j=1}^{n_i} l_{i,j})$, soit encore $\bigwedge_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^{n_i} (\neg l_{i,j})$, et la suppression des éventuelles doubles négations au niveau des littéraux donne une forme normale conjonctive.