DM sur la théorie des jeux

Informatique de tronc commun **ou** MPI

Julien Reichert

Dans ce devoir, le langage de programmation est à adapter au public (tronc commun ou MPI).

Une composante mathématique (arithmétique de niveau SUP) non négligeable figure dans les exercices.

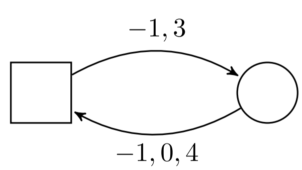
Robot Games

Sous le nom de "Robot Games" [DR13] se cache une extension du plus simple des jeux de Nim, qu'on connaît également sous le nom du jeu des petits bâtons popularisé par Fort Boyard. (Il ne s'agit pas de la version où figurent quatre tas, dont la stratégie gagnante fait appel à des calculs de XOR binaire, pour préciser...)

Le principe est le suivant : deux joueurs, appelés Adam et Ève, déplacent tout à tour un jeton dans $\mathbb{Z}^d$. Adam commence et dispose d'un ensemble fixe de vecteurs de déplacements, puis Ève joue avec son propre ensemble de vecteurs de déplacements.

Le programme officiel n'évoquant pas la possibilité de manipuler de données annexes à l'arène, la position du jeton devrait être encodée dans le sommet actuel, ce qui donnerait un graphe infini (mais de degré fini) comme support. Autant dire qu'on va changer de mode de représentation et se contenter de dessiner l'arène limitée à deux sommets, en représentant l'état actuel d'une partie par un couple formé d'un booléen (faux si c'est au tour d'Ève, vrai si c'est au tour d'Adam) et de la position du jeton.

Ci-après l'arène de jeu associée à l'ensemble de vecteurs $\{-1, 3\}$ pour Adam et $\{-1, 0, 4\}$ pour Ève, ici en dimension 1.



La configuration de départ est (vrai, x) pour un x arbitraire, et la condition de gain d'Ève est une condition d'accessibilité de la configuration formée par le booléen vrai et l'origine du repère. Le jeu est à somme nulle, donc Adam a une condition de sûreté.

Commençons par une bonne nouvelle : dans presque tout ce qui suit, la dimension sera limitée à un, car au-delà déterminer l'ensemble des positions gagnantes d'Ève est un problème indécidable (preuve pour la dimension 3 et au-delà dans [Rei15], preuve pour la dimension 2 dans [NPR16]).

L'objectif de ce sujet est de retrouver les grandes lignes de l'algorithme résolvant le problème en dimension 1, en temps linéaire en la valeur maximale apparaissant dans les ensembles de vecteurs, c'est-à-dire dans Exptime vu l'encodage binaire des entiers, sachant que le problème a été prouvé complet pour cette classe de complexité dans [AR13].

Dans tout ce sujet, quand on parlera de *position gagnante pour Ève* ou *position gagnante pour Adam*, cela signifiera que si le jeton est dans cette position quand c'est le tour d'Adam, Ève (resp. Adam) dispose alors d'une stratégie gagnante.

La première mention du jeu dans [DR13] propose les ensembles suivants en dimension deux : $\{(1,3),(2,1)\}$ pour Adam, et $\{(2,0),(1,2)\}$ pour Ève.

Exercice 1 : Montrer que $(-3,-3)$ est une position gagnante pour Ève.

Passons rapidement par le cas général en dimension quelconque.

Exercice 2 : Montrer que la somme, et par extension toute combinaison linéaire à coefficients entiers positifs de deux positions gagnantes pour Ève est une position gagnante pour Ève.

Exercice 3 : Montrer que si le nombre de vecteurs disponibles pour Adam est strictement supérieur au nombre de vecteurs disponibles pour Ève, alors Ève n'a aucune position gagnante en dehors de l'origine du repère.

Exercice 4 : À quoi se résume la détermination des positions gagnantes si Adam dispose d'un seul vecteur ?

Exercice 5 : Montrer qu'Ève dispose d'une position gagnante en dehors de l'origine si, et seulement si, il existe un vecteur f tel que pour tout élément a de l'ensemble des vecteurs d'Adam il existe un élément e de l'ensemble des vecteurs d'Ève vérifiant $a+e=f$. Donner dans ce cas une position gagnante pour Ève en dehors de l'origine.

Exercice 6 : Soit une instance donnée par les ensembles de vecteurs X_A et X_E. Soit un vecteur x et soient les ensembles $\tilde{X}_A = \{x_a + x \mid x_a \in X_A\}$ et $\tilde{X}_E = \{x_e - x \mid x_e \in X_E\}$. Montrer que les positions gagnantes de chaque joueur sont les mêmes dans l'instance donnée par les ensembles de vecteurs $\tilde{X}_A$ et $\tilde{X}_E$.

Exercice 7 : Soit une instance donnée par les ensembles de vecteurs X_A et X_E. Soit un entier k et soient les ensembles $\tilde{X}_A = \{kx_a \mid x_a \in X_A\}$ et $\tilde{X}_E = \{kx_e \mid x_e \in X_E\}$. Donner la transformation de l'ensemble des positions gagnantes pour Ève en passant à l'instance donnée par les ensembles de vecteurs $\tilde{X}_A$ et $\tilde{X}_E$.

Désormais, la dimension passe pour de bon à un. On continuera néanmoins à parler de « vecteurs » pour des grandeurs qui sont des entiers en pratique.

Exercice 8 : Supposons que tous les vecteurs soient positifs. Que peut-on en déduire ?

Exercice 9 : Supposons que le plus petit vecteur d'Adam soit inférieur à l'opposé du plus grand vecteur d'Ève (un cas symétrique s'imagine naturellement). Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 : Supposons que le plus grand vecteur d'Ève soit supérieur à l'opposé du plus petit vecteur d'Adam, et que d'autre part on sache que l'ensemble des positions gagnantes d'Adam soit majoré. Que peut-on en déduire ?

Exercice 11 : Supposons qu'Ève ait deux positions gagnantes x_+ et x_- vérifiant que $x_- < 0 < x_+$ et $\mathrm{PGCD}(-x_-, x_+) = 1$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 12 : Supposons qu'il existe un entier d supérieur ou égal à 2 qui divise tous les vecteurs d'Adam et tous les vecteurs d'Ève (une hypothèse plus faible conduisant à la même réponse attendue est simplement que d divise toutes les sommes d'un vecteur d'Adam et d'un vecteur d'Ève). Que peut-on en déduire ?

On admettra pour la suite le résultat suivant, dû à James Joseph Sylvester en 1882 :

Si p et q sont premiers entre eux, alors le plus grand entier naturel qui ne s'exprime pas comme une combinaison linéaire de p et q à coefficients entiers naturels est $pq-p-q$.

Exercice 13 : Supposons qu'Ève ait deux positions gagnantes qui sont des entiers de même signe et premiers entre eux. Que peut-on en déduire ?

À présent, il est l'heure de programmer un peu. Les instances d'un Robot Game seront représentées par une séquence (toute mention de « séquence » sera à comprendre comme « liste » ou « tableau » suivant le langage) d'entiers pour chacun des deux joueurs, ainsi que l'entier où le jeu démarre si on souhaite le préciser. Lorsque ce sera intuitif, on ne précisera pas qu'elles sont en argument des fonctions à écrire.

Exercice 14 : Écrire une fonction qui calcule le PGCD de deux entiers, positifs ou non. On peut supposer les entiers différents.

Exercice 15 : Écrire une fonction qui calcule le PGCD global d'une séquence d'entiers, positifs ou non. On peut supposer les entiers différents deux à deux.

Exercice 16 : Écrire une fonction qui détermine s'il existe une position gagnante non triviale pour Ève, auquel cas elle en renvoie une, et sinon la valeur renvoyée sera `0`.

Exercice 17 : Écrire une fonction qui détermine s'il existe une position gagnante qui ne soit pas un multiple (avec un quotient positif) de la position gagnante trouvée dans la fonction précédente, auquel cas elle en renvoie une, et sinon la valeur renvoyée sera `0`.

Cela tombe un peu comme un cheveu dans la soupe de faire faire une preuve théorique ici, donc inutile d'en faire un exercice, mais on peut montrer que si une position négative est gagnante pour Ève, alors il existe une stratégie gagnante pour Ève qui garantisse qu'aucun tour d'Adam ne commence par la suite dans une position inférieure à la position gagnante en question.

Exercice 18 : Soit m la somme du plus grand vecteur de l'ensemble d'Adam et du plus grand vecteur de l'ensemble d'Ève, ramenée à zéro si elle est négative. Écrire une fonction qui détermine en reprenant l'idée du calcul de l'attracteur l'ensemble des positions gagnantes pour Ève qui soient comprises entre $-m$ et un certain seuil en argument. Au vu de l'exercice 8, on peut supposer le seuil positif.

Exercice 19 : Conclure en écrivant une fonction résolvant une instance du Robot Game en déterminant si une position donnée en argument est gagnante ou non.

Exercice 20 : Calculer la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente.

Bibliographie :

[AR13] A. Arul and J. Reichert. The complexity of robot games on the integer line. In Proceedings of the 11th Workshop on Quantitative Aspects of Programming Languages and Systems (QAPL), volume 117 of EPTCS, pages 132–146, 2013.

[DR13] L. Doyen and A. Rabinovich. Robot games. Research Report LSV-13-02, Laboratoire Spécification et Vérification, ENS Cachan, France, January 2013. 2 pages.

[NPR16] Reino Niskanen, Igor Potapov, Julien Reichert. Undecidability of Two-dimensional Robot Games. MFCS 2016 : 73 :1-73 :13

[Rei15] Julien Reichert. Reachability games with counters : decidability and algorithms. (Décidabilité et complexité de jeux d'accessibilité sur des systèmes à compteurs). Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan, France, 2015