Correction de la partie mathématique du TP de BCPST1B

Julien Reichert

Une histoire de probabilités...

Premier exercice

On va faire directement la preuve pour le cas général : $2n$ cartes à répartir en deux mains de n cartes.

Sur les $2n$ cartes, seules 3 sont marquées, et si elles se retrouvent dans la même main (ce qui impose $n \geq 3$), alors il faut les accompagner de $n-3$ des $2n-3$ cartes non marquées. En doublant le nombre de choix ainsi décrit car les cartes marquées peuvent être dans la main de gauche ou dans celle de droite, cela donne $\frac{2\binom{2n-3}{n-3}}{\binom{2n}{n}}$ (sachant que le nombre de répartitions est bien entendu $\binom{2n}{n}$).

Pour notre cas précis, $n = 10$ et la formule donne $\frac{2\binom{17}{7}}{\binom{20}{10}}$.

En pratique, en utilisant trois fois la formule dite du capitaine ($\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$), les coefficients binomiaux se simplifient, et des simplifications ultérieures conduisent à une version bien plus pratique : la probabilité dans le cas général est $\frac{n-2}{4n-2}$, soit $\frac{4}{19}$ quand $n = 10$.

Deuxième exercice

La formule simplifiée ci-avant donne très facilement une limite valant $\frac{1}{4}$, qu'on peut interpréter ainsi : si le nombre de places augmente démesurément, le placement de chaque carte a la même tendance qu'une épreuve de Bernoulli, et une fois la première carte marquée placée, peu importe où, les deux autres ont techniquement une chance sur deux d'être au même endroit, de manière indépendante, d'où le même résultat.

Le jeu de Yam's

Troisième exercice

Le nombre de lancers de dés possibles est 6^5. Seuls 6 sont des Yam's, un par face répétée cinq fois. La probabilité est donc $\frac{1}{6^4}$.

Quatrième exercice

Quatre dés identiques : on choisit la face commune (6 choix), la face de l'autre dé (5 choix restants) et la place du dé ayant une face différente (5 choix), pour un total après simplification de $\frac{25}{6^4}$.

Trois dés identiques : on choisit la face commune (6 choix), la face des autres dés (5^2 choix restants, les deux dés pouvant être identiques par ailleurs) et la place des dés ayant une face différente ($\binom{5}{2}$, soit 10 choix), pour un total après simplification de $\frac{250}{6^4}$.

Tous les dés différents : on choisit successivement les cinq faces uniques, pour un numérateur valant $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$ et un total après simplification partielle (en vue de la suite) de $\frac{120}{6^4}$.

Deux dés identiques : puisqu'on a couvert tous les autres cas, on soustrait la somme des probabiltés obtenues à 1 et on obtient $\frac{900}{6^4}$, qu'on pourra aussi laisser tel quel sans simplification.

Cinquième exercice

C'est la probabilité piégée : si on a gardé deux dés et qu'on en relance trois, l'un des trois peut avoir la face gardée (3 choix de ce dé) et les deux autres une face différente au choix, éventuellement deux fois la même (25 choix de couples), mais il reste aussi 5 cas où les trois dés donnent une face identique qui n'est pas celle des dés gardés. La probabilité totale est donc $\frac{80}{6^3}$.

Sixième exercice

Remarquons qu'on ne garde pas cinq dés, sinon c'est fini. De même, garder un seul dé n'a aucun intérêt (d'ailleurs cela revient à verrouiller une face et lancer quatre dés, intuitivement cela justifie que les dénominateurs dans la première phase soient 6^4 et cela ne change rien si le seul but est de faire un Yam's) et on reprend les probabilités précédentes. Il reste à calculer les probabilités suivantes :

Garder 4 dés et arriver à 5 dés identiques : probabilité $\frac{1}{6}$.

Garder 4 dés et y rester : c'est le complémentaire, donc $\frac{5}{6}$.

Garder 3 dés et arriver à 5 dés identiques : probabilité $\frac{1}{6^2}$.

Garder 3 dés et y rester : les deux autres dés ont chacun 5 faces possibles, d'où la probabilité $\frac{25}{36}$.

Garder 3 dés et arriver à 4 dés identiques : c'est le complémentaire, donc $\frac{10}{36}$.

Garder 2 dés et arriver à 5 dés identiques : probabilité $\frac{1}{6^3}$.

Garder 2 dés et arriver à 4 dés identiques : on choisit le dé qui n'a pas donné la face commune (3 choix) et sa face (5 choix), d'où la probabilité $\frac{15}{216}$.

Garder 2 dés et y rester : c'est le complémentaire (en tenant compte de la probabilité de l'exercice précédent aussi), donc $\frac{120}{6^3}$.

1 Un peu de dénombrement...

Septième exercice

Si $k = 0$, il n'y a pas d'application possible, sauf dans le cas où $n = 0$ aussi, où il y en a conventionnellement une, qui est tout aussi conventionnellement bijective donc surjective.

Si $k = 1$, il n'y a qu'une application possible, qui est surjective... sauf si $n = 0$.

Si $k = n$, une surjection est une bijection, qu'on appelle permutation, et leur cardinal est bien connu : c'est $n!$ (et on retrouve le cas $k = n = 0$).

Huitième exercice

Si $k = 2$ et $n \geq 2$, on a $u_2^{(n)} = 2^n - 0 - \binom{2}{1}u_1^{(n)}$ soit $2^n - 2$ d'après ce qui précède. En testant la fonction qui engendre toutes les fonctions, on trouve par exemple 30 pour $n = 5$ et 1022 pour $n = 10$.

Si $k = 3$ et $n \geq 3$, on a $u_3^{(n)} = 3^n - 0 - \binom{3}{1}u_1^{(n)} - \binom{3}{2}u_2^{(n)}$ soit $3^n - 3(2^n - 1)$ après simplification. On trouve alors 150 pour $n = 5$ et 55980 pour $n = 10$.

La preuve de la formule est la suivante : les k^n applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à k éléments se répartissent suivant l'ensemble des valeurs effectivement prises. Pour toute taille i de cet ensemble, il y a $\binom{k}{i}$ choix des éléments et par définition $u_i^{(n)}$ applications ayant ces éléments exactements pour ensemble des images. Les surjections sont isolées dans l'égalité qui s'en déduit.

Neuvième exercice

Si $k = n - 2$, il y a une méthode combinatoire pour obtenir la valeur : supposons une application f surjective sous ces conditions. Alors deux cas se présentent : soit il existe un des $n - 2$ éléments de l'ensemble d'arrivée qui a trois antécédents, soit il existe deux éléments qui en ont deux (à condition que n soit strictement supérieur à 3 pour que $n - 2$ ne soit pas limité à 1).

Dans le premier cas, on choisit l'élément répété trois fois ($n - 2$ choix), puis ses antécédents ($\binom{n}{3}$ choix), puis on répartit les autres images ($(n - 3)!$ choix pour la bijection qui en découle).

Dans le deuxième cas, on choisit les deux éléments répétés deux fois ($\binom{n-2}{2}$ choix), puis leurs antécédents ($\binom{n}{2}$ choix pour l'un, $\binom{n-2}{2}$ choix pour l'autre), puis on répartit les autres images ($(n - 4)!$ choix de la même façon).

Le total est alors $(n - 2)\binom{n}{3}(n - 3)! + \binom{n-2}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n - 4)!$, ce qui se simplifie en développant les coefficients binomiaux en $\frac{n-2}{6}n! + \frac{(n-2)(n-3)}{8}n!$ qu'on rassemble pour obtenir $\frac{(4+3(n-3))}{24}(n - 2)n!$ soit encore $\frac{3n-5}{24}(n - 2)n!$ pour $n \geq 4$ avec les valeurs calculées à part 1 si $n = 3$ et 0 en-deçà (on note que pour $n = 3$ et $n = 2$ la formule reste valable, et pour $n = 1$ et $n = 0$ le contexte est contradictoire).