Recueil d'exercices de colle

Julien Reichert

Ce document présente des exercices de colle de composition personnelle s'éloignant généralement de l'application directe du cours. La liste n'est pas exhaustive (et a priori la liste de tous les exercices ne sera pas publiée de sitôt).

Semaine 1 - Calculs algébriques

Exercice : Étudier les variations de la fonction $x \mapsto x^{x^x}$.

Remarque : Le signe de la dérivée ne peut pas s'obtenir uniquement par factorisation, mais on peut en pratique minorer par 0 son facteur de signe difficile à déterminer.

Exercice : Étudier la dérivée de la fonction $f \ : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ définie sur $[-1;1]$ et dérivable partout sauf aux bornes. Montrer que $f'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$.

Dans l'exercice, il s'agit même de deviner cette dernière relation.

Remarque : L'exercice peut aussi se donner dans la semaine concernant les fonctions usuelles.

Exercice : Donner deux facteurs premiers de 9999999968.

Puisque 2 est un facteur premier évident, on peut aussi demander quelle est sa puissance dans la décomposition en facteurs premiers (question d'arithmétique).

Exercice : Si n est impair, prouver simplement la formule $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.
Si n est pair, calculer $\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^{2k+1}\binom{n}{2k+1} = 0$, qui est aussi la somme des $-\binom{n}{k}$ pour k impair entre 1 et $n-1$.

Exercice : Prouver par récurrence que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$. Le prouver ensuite géométriquement.

Semaine 2 - Nombres complexes

Exercice : Développer $(z-(a+bi))(z-(c+di))$. Soit un polynôme de degré 2 à coefficients réels, dont une racine est irréelle. Quelle est l'autre racine ?

Exercice : Soient $n \geq 2$ et ω une racine n-ième de l'unité différente de 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^k$. Donner une preuve géométrique si n est pair et k est premier avec n.

Exercice : Soit $n \geq 1$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité. Donner une preuve géométrique.

Exercice : Soient z et z' dans $\mathbb{U}$. À quelle condition a-t-on $|z+z'| \leq 1$?

Exercice : Donner deux élements de $\mathbb{U}$ dont la différence est dans $\mathbb{U}$.

Semaine 3 - Fonctions usuelles

Exercice : À quelle condition obtient-on le même résultat en faisant une rotation et une homothétie dans les deux ordres possibles ? (On attend une preuve géométrique pour la condition suffisante.)

Remarque : Pour la condition suffisante, utiliser l'isomorphisme entre $(\mathbb{C}^*, \times)$ et le groupe des similitudes directes centrées en un même point muni de la composition est évident, mais hors de portée des élèves au moment où l'exercice est posé.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos t + \cos 2t = 1$.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos t + \cos 2t = 2$.

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos t + \cos 2t = 0$.

Exercice : Quelle est la médiatrice du segment reliant les points d'affixe $e^{i\theta}$ et $e^{i\theta'}$ (pour θ et θ' représentant des angles différents).

Exercice : Que donne la composée de deux rotations ? de deux homothéties ?

Exercice (non donné mais présenté pour le plaisir) : Trouver un nombre complexe dont le cosinus (étendu en utilisant la formule d'Euler) est 20.

Semaine 6 ou 7 - Suites récurrentes, équations différentielles, etc.

Exercice : Étudier l'application $x \mapsto \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$ (ensemble de définition, injectivité, surjectivité, minoration, majoration, bornes éventuelles).

Exercice : Idem avec $x \mapsto \frac{x}{\lfloor x \rfloor}$.

Exercice : Déterminer une expression de la fonction qui à un réel associe son n-ième chiffre après la virgule.

Exercice : Écrire la fonction valeur absolue sans le symbole | | (ni par disjonction).

Exercice : Résoudre l'équation différentielle $y''(t) = y'(t) + 5t$.

Exercice : Trouver le terme général de la suite (u_n) telle que $u_0 = 2$ et $(n+1)u_{n-1} = nu_n$.

Exercice : Trouver le terme général de la suite (u_n) telle que $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ en fonction de u_0 et u_1.

Semaine 7 ou 8 - Applications, ensembles de nombres

Exercice : Que dire de la relation binaire R sur $\mathbb{Z}$ telle que xRy si, et seulement si, $\exists n \in \mathbb{N}, x \equiv y[n]$?

Exercice : À quelle condition sur E la relation binaire R sur $\mathbb{Z}$, telle que xRy si, et seulement si, $\exists n \in E, x \equiv y[n]$, est-elle une équivalence ?

Exercice : Soient les fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et à valeur dans $\mathbb{N}$: $f(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\mathbb{N}}(n)$ et $g(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{1}_{k\mathbb{N}}(n)$. Que font les fonctions f et g ? Quels sont les images réciproques de 2 par f, de $2\mathbb{N}+1$ par f et de 2 par g ?

Semaine 10 ou 12 - Structures algébriques usuelles

Exercice : L'ensemble $\{\text{vrai}, ?, \text{faux}\}$ muni des lois « ou » et « et »de la logique ternaire est-il un anneau ? Peut-on trouver d'autres lois qui en font un anneau ?

Exercice : Montrer que l'ensemble des similitudes directes autour d'un même point est un groupe pour la composition.

Semaine 13 ou 15 - Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Exercice : Déterminer dans chacun des cas l'ensemble des couples d'entiers (a, b) vérifiant la ou les propriétés suivantes.

- $\frac{a \vee b}{a \wedge b} = 42$;
- $\frac{a \vee b}{a} = 10$ et $\frac{b}{a \wedge b} = 4$;
- $(a \vee b)(a \wedge b) = 42$ et $b - a = 13$.

Exercice : Soient a, b tels que $\frac{a \vee b}{a \wedge b} = 2^n$, pour un entier naturel n fixé. Discuter du nombre de couples (a, b) possibles si on fixe l'un des quatre nombres $a, b, a \vee b, a \wedge b$ (suivant celui qu'on fixe et la valeur fixée) en respectant l'hypothèse initiale. Généraliser à un quotient $\frac{a \vee b}{a \wedge b}$ quelconque.

Exercice : Déterminer le nombre de 0 à la fin de 1000! écrit en base 40.

Semaines 13 à 15 - Polynômes et arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice : Combien un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ peut-il avoir de racines réelles ? Et un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$?

Exercice : Décomposer $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Par ailleurs, combien $X^n + X^{n-1} + \cdots + X + 1$ a-t-il de racines réelles ?

Exercice : On donne $P = X^3 - 10X^2 + 31X - 30$ et $Q = X^5 - 37X^4 + 419X^3 - 1463X^2$. Avec la garantie que P et Q sont scindés à racines entières, prouver que P ne divise pas Q (sans faire la division euclidienne).

Semaines 20 à 22 - Algèbre linéaire

Exercice : Étudier l'application qui à une matrice carrée M de taille n associe le couple de matrices carrées $(M + {}^{\mathrm{t}}M, M - {}^{\mathrm{t}}M)$.

Exercice : Que dire d'une symétrie qui est aussi une projection ?

Exercice : Montrer que pour tout polynôme P de degré n la famille $(P, P', \ldots, P^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Qu'en est-il de la famille $(P, XP', \ldots, X^n P^{(n)})$?

Semaine 22 - Probabilités

Exercice : Quelle est la probabilité qu'une main de 13 cartes ait exactement un sept et 7 contrôles italiens (le nombre de contrôles italiens d'une main est son nombre de rois plus deux fois son nombre d'as) ? [1]

Exercice : Quelle est la probabilité qu'une main de 13 cartes ait un carré ? [2]

Exercice : Soient $2n + 1$ événements indépendants tous de probabilité $\frac{1}{2}$. Déterminer la probabilité qu'au moins $n + 1$ événements soient réalisés.

Exercice (non donné mais cela ne saurait tarder) : Soient $n - 1$ événements tel que l'événement numéro $1 \leq i \leq n - 1$ ait une probabilité $\frac{1}{i+1}$. Quelle est la probabilité qu'un nombre pair d'événements soit réalisé ?

Semaine 30 - Espaces orthogonaux

Exercice : Caractériser les matrices de $\mathcal{O}(2)$ dont la somme des éléments de chaque ligne est 1.

1. Source : `http://rpbridge.net/8m67.htm`
2. Même source...