Rappel du cours précédent

- Domaines finis et contraintes arithmétiques : bornes-consistance.
- $X = Y + Z$, $D(X) = [4..8]$, $D(Y) = [0..3]$, $D(Z) = [2..2]$
- Les règles de propagation donnent:
  - $(0 + 2 =)2 \leq X \leq 5 (= 3 + 2)$
  - $(4 - 2 =)2 \leq Y \leq 6 (= 8 - 2)$
  - $(4 - 3 =)1 \leq Z \leq 8 (= 8 - 0)$
- Les domaines peuvent être réduits:
  $D(X) = [4..5]$, $D(Y) = [2..3]$, $D(Z) = [2..2]$

GNU Prolog

- `http://www.gprolog.org`
- Prolog avec solutionneur de contraintes sur un domaine fini
- Solutionneur *incomplet* basé sur arc-consistance et bornes-consistance (au choix, voir plus tard).
- Il faut écrire explicitement dans le programme la commande pour énumérer les éléments des domaines de variables.
- Dans les contraintes toutes les variables sont des entiers entre 0 et `fd_max_integer`.

GNU Prolog pratique

- Lancer l'interprète par la commande `gprolog`
- Utiliser `consult` pour charger un programme, pas `reconsult` comme en Yap.
- Les contraintes s'écrivent avec des prédicats particuliers (voir les transparents suivants). Il n'y a pas d'accolades comme en Yap pour distinguer la partie contraintes des problèmes d'unification.
- Il n'y a pas de librairies à spécifier, contrairement à Yap.

Les domaines finis en GNU Prolog

- Attention : que de valeurs entre 0 et `fd_max_integer`.
- Deux représentations :
  - intervals
  - ensembles (Attention: marche uniquement jusqu'à `vector_max`, typiquement 127)
    Réalisé comme un vecteur de bits.
- Si pas de domaine spécifié : interval $[0..\mathrm{fd\_max\_integer}]$.
- Par défaut représentation intervals, changé dynamiquement en représentation ensemble (attention: on risque de perdre des solutions).

Prédicats de base

- `fd_domain(?Vars, +Integer1, +Integer2)`
  définit le domaine d'une variable `Vars` ou d'une liste de variables d'être entre `Integer1` et `Integer2`.
- `fd_domain(?Vars,+ListeValeurs)`
  pareil avec une liste de valeurs
- `fd_all_different(?ListeVars)`
  Ce prédicat décrit la contrainte qui impose que toutes les variables de la liste `ListeVars` prennent des valeurs différentes.

Intervals et ensembles

```
| ?- X#=<512.
X = _#2(0..512)
yes

| ?- X#=<512, X#\=10.
X = _#2(0..9:11..127@)
yes

| ?- X#=<512, X#\=10, X#=<100.
X = _#2(0..9:11..100)
yes
```

Attention au @ qui indique une perte de valeurs.

Contraintes arithmétiques

- Les contraintes arithmétiques s'écrivent en utilisant les fonctions habituelles et les prédicats suivant: `#=`, `#\=`, `#<`, `#>`, `#<`, `#=<`, `#>=`.
  Règles de propagation : bornes-consistances.
- On peut aussi utiliser `#=#`, `#\=#`, `#<#`, `#>#`, `#<#`, `#=<#`, `#>=#`.
  Règles de propagation : (hyper)-arc-consistance

Exemple

```
| ?- fd_domain(X,1,8), fd_domain(Y,2,7), X #= 2*Y.

X = _#3(4..8)
Y = _#25(2..4)

yes
| ?- fd_domain(X,1,8), fd_domain(Y,2,7), X #=# 2*Y.

X = _#3(4:6:8)
Y = _#25(2..4)

yes
```

Labeling

- `fd_labeling(?Vars)`
  Ce prédicat est utilisé pour rechercher des solutions de contraintes sur les variables `Vars` avec des options par défaut.
- Peut être appliqué à une seule variable, ou une liste de variables.
- `fd_labeling(?Vars, ?Options)`
  Ce prédicat est utilisé pour rechercher des solutions des contraintes sur les variables `Vars` avec une liste d'options `Options`.
  - par exemple: `[variable_method(most_constrained)]` a comme effet que la variable choisie pendant la résolution est celle qui est la plus contrainte.
- plus de détails plus tard.

Structure générale d'un programme simple

- Dans le cas le plus simple, un programme pour résoudre une contrainte s'écrit en trois parties :
  - définir les domaines des variables
  - décrire la contrainte
  - labeling

Exemple

```
probleme([X,Y,Z]) :- fd_domain(X,0,5),
                     fd_domain([Y,Z],3,7),
                     X+Y #< 2*Z,
                     fd_labeling([X,Y,Z],[]).

| ?- probleme(L).
L = [0,3,3] ? ;
L = [0,3,4] ? ;
L = [0,3,5] ? ;
etc.
```

Labeling

- Prédicat extra-logique : `fd_min(+fd_variable,?integer)` : Donne la valeur minimale du domaine de la variable.
- On peut imaginer labeling (pour une variable) défini comme :

```
labelling(X) :- fd_min(X,N), X=N.
labelling(X) :- fd_min(X,N), X #\= N,
                fd_labelling(X).
```

- Utilise la stratégie de recherche de Prolog.

Exemple: sac du contrebandier

- Contrebandier avec un sac de capacité 9.
- Il doit choisir des objets pour faire un profit d'au moins 30
objet	profit	poids
whisky	15	4
parfum	10	3
cigarettes	7	2

  $4W + 3P + 2C \leq 9 \wedge 15W + 10P + 7C \geq 30$

Le contrebandier en GNU Prolog

- Un prédicat prédéfini lance le solutionneur.

```
?- fd_domain([W,P,C],0,9),
    4*W + 3*P + 2*C #=< 9,
   15*W + 10*P + 7*C #>= 30,
   fd_labeling([W,P,C]).
C = 3
P = 1
W = 0 ? ;
C = 0
P = 3
W = 0 ? ;
C = 1
P = 1
W = 1 ? ;
C = 0
P = 0
W = 2
```

Éliminer des symétries

- Des symétries dans l'arbre de recherche peuvent faire un programme naïf très inefficace.
- On peut avoir beaucoup de façons symétriques d'écrire une partie de l'arbre de recherche.
- C'est un problème quand il s'agit d'une partie de l'arbre de recherche dont tous les nœuds sont des nœuds d'échec.
- Si on élimine des symétries : attention quand on essaye de trouver *toutes* les solutions.

Exemple : élimination de symétries

- Dans un magasin : le client veut payer quatre articles.
- Le caissier lui annonce un prix de 7.11 €.
- Quand le client lui demande les prix des articles séparés, le caissier lui répond simplement que le produit des prix est également 7.11 €.
- Quels sont les prix des quatre articles ?

Exemple 7.11 € en Prolog

```
prix(A,B,C,D) :-
     fd_domain([A,B,C,D],1,708),
     A+B+C+D #= 711,
     A*B*C*D #= 711 * 100 * 100 * 100,
     fd_labeling([A,B,C,D]).

| ?- prix(A,B,C,D).
A = 120
B = 125
C = 150
D = 316 ?
(112 ms) yes
```

Éliminer les symétries

Idée : on impose l'ordre sur les valeurs des variables.

```
prixa(A,B,C,D) :-
     fd_domain([A,B,C,D],1,708),
     A+B+C+D #= 711,
     A*B*C*D #= 711 * 100 * 100 * 100,
     A #=< B, B #=< C, C #=< D,
     fd_labeling([A,B,C,D]).
```

Trouve la solution en 40 milli-secondes.

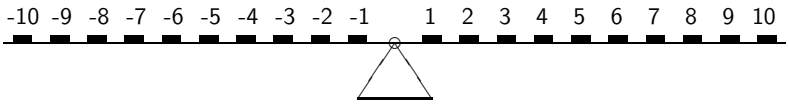
Encore mieux

Idée : 79 est un facteur premier de 711. Choisir la variable qui contient ce facteur.

```
prixb(A,B,C,D) :-
     fd_domain([A,B,C,D],1,708),
     A+B+C+D #= 711,
     A*B*C*D #= 711 * 100 * 100 * 100,
     A #= 79*X,
     B #=< C, C #=< D,
     fd_labeling([A,B,C,D]).
```

Trouve la solution en 4 milli-secondes.

Exemple: Programmer la génération des contraintes



- Donné : liste de poids de personnes.
- Exemple : $[30, 40]$
- Les tous placer tel que la balançoire est en équilibre.
- Sur l'exemple : $[-4, 3]$.

Solution balançoire

- Attention : en GNU Prolog, les domaines finis ne contiennent que des valeurs non négatives !
- Décaler toutes les places dans le positif : $0 \ldots 20$, le pivot est donc sur la position 10.

```
placement(Poids,Places) :-
     length(Poids,N),
     length(Places,N),
     fd_domain(Places,0,20),
     fd_all_different([10|Places]),
     gauche(Poids,Places,M),
     droite(Poids,Places,M),
     fd_labeling(Places,[]).
```

Solution balançoire

```
gauche([],[],0).
gauche([_|Poids],[Place|Places],M) :-
     Place #> 10, gauche(Poids,Places,M).
gauche([Poid|Poids],[Place|Places],M) :-
     Place #< 10,
     M #= MM + Poid*(10-Place),
     gauche(Poids,Places,MM).
droite([],[],0).
droite([_|Poids],[Place|Places],M) :-
     Place #< 10, droite(Poids,Places,M).
droite([Poid|Poids],[Place|Places],M) :-
     Place #> 10,
     M #= MM + Poid*(Place-10),
     droite(Poids,Places,MM).
```

Exemple: Pavage

- Donnée une liste de pavés (exemple: $[(2,2),(3,4)]$) et les dimensions du plan.
- Déterminer si on peut placer les pavés sur le plan sans recouvrement, et si oui donner le plan (les coordonnées des coins des pavés placés).
- Ici : utiliser une contrainte définie par l'utilisateur qui exprime que deux pavés ne se recouvrent pas.
- Ici pour simplifier : on ne n'autorise pas de tourner les pavés.

Exemple : pavage (1)

```
disjoint((_,R,_,_),(L1,_,_,_)) :- R #=< L1.
disjoint((L,_,_,_),(_,R1,_,_)) :- L #>= R1.
disjoint((_,_,_,U),(_,_,D1,_)) :- U #=< D1.
disjoint((_,_,D,_),(_,_,_,U1)) :- D #>= U1.

alldisjoint(_,[]).
alldisjoint(Q,[H|T]) :- disjoint(Q,H), alldisjoint(Q,T).
```

Exemple : pavage (2)

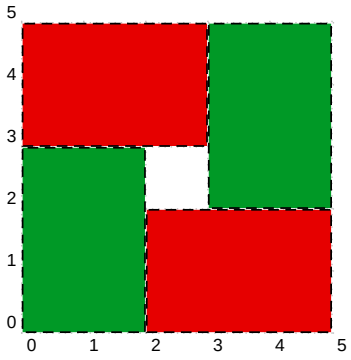
```
p([],_,_,[],[]).
p([(X,Y)|Rest], Width, Height, [(L,R,D,U)|Plan],
   [L,R,D,U|Vars]) :-
    fd_domain([L,R],0,Width),
    fd_domain([D,U],0,Height),
    R #= L + X,
    U #= D + Y,
    p(Rest,Width, Height, Plan, Vars),
    alldisjoint((L,R,D,U), Plan).

paving(In,Width,Height,Plan) :-
p(In,Width,Height,Plan,Vars),
fd_labeling(Vars).
```

Exemple : le problème de la guillotine

- On veut couper une feuille de papier en plusieurs morceaux.
- On a seulement une guillotine pour découper la feuille.
- Étant donné les dimensions de la feuille et des morceaux, est-ce possible ?

Différence avec le problème de pavage

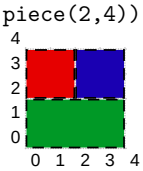


Spécification du problème

Écrire un prédicat `cut(+Pieces,+Hauteur,+Largeur,?Plan)` où

- `Pieces` est la liste des dimensions des morceaux souhaités,
- `Largeur` et `Hauteur` sont les dimensions du plan à découper
- `Plan` est le plan de découpage.

```
| ?- cut([(2,2),(2,2),(2,4)],4,4,P).
P = vertical(2,horizontal(2,piece(2,2),piece(2,2)),
              piece(2,4)) ? ;
```



L'idée de l'algorithme

- Construction d'un arbre.
- Si on veut un seul morceaux, et s'il tient dans les dimensions : créer une feuille de l'arbre.
- Si on veut plusieurs morceaux :
  - choisir la ligne de découpage.
  - choisir une partition des morceaux telle que les sommes de surfaces tiennent dans les deux moitiés du plan.
  - appeler cut récursivement sur les deux sous-problèmes, combiner les plans obtenus pour construire le plan entier.

Première solution naïve

```
cut([(X,Y)],L,H,piece(X,Y)) :- X #=< L, Y #=< H.
cut([(X,Y)],L,H,piece(Y,X)) :- Y #=< L, X #=< H.
cut(Pieces,Largeur,Hauteur,vertical(Cut,PlanA,PlanB)) :-
 fd_domain(Cut,1,Largeur),
 RestLargeur #= Largeur-Cut,
 SurfaceA #= Cut*Hauteur,
 SurfaceB #= RestLargeur*Hauteur,
 partition(Pieces,ResultA,ResultB,SurfaceA,SurfaceB),
 fd_labeling(Cut),
 cut(ResultA,Cut,Hauteur,PlanA),
 cut(ResultB,RestLargeur,Hauteur,PlanB).
cut(Pieces,Largeur,Hauteur,horizontal(Cut,PlanA,PlanB)) :-
    ...
```

Solution naïve suite

```
partition([],[],[],_,_).
partition([(X,Y)|T],[(X,Y)|R],ResultB,SurfaceA,SurfaceB) :-
     X*Y #=< SurfaceA,
     SurfaceA #= X*Y + NewSurfaceA,
     partition(T,R,ResultB,NewSurfaceA,SurfaceB).
partition([(X,Y)|T],ResultA,[(X,Y)|R],SurfaceA,SurfaceB) :-
     X*Y #=< SurfaceB,
     SurfaceB #= X*Y + NewSurfaceB,
     partition(T,ResultA,R,SurfaceA,NewSurfaceB).
```

Testons la solution naïve

```
  | ?- cut([(2,2),(2,2),(2,4)],4,3,P).
no

| ?- cut([(2,2),(2,2),(2,4)],4,4,P).
Fatal Error: cstr stack overflow
```

L'erreur de la solution naïve

- La récurrence ne s'arrête pas :
  - On permet de couper tel qu'un plan a la surface 0.
  - On permet de partitionner la liste vide en deux listes vides.
- Deux solutions possibles :
  - Renforcer la contrainte sur la variable `Cut`
  - Ne pas permettre des partitions triviales (une liste vide).

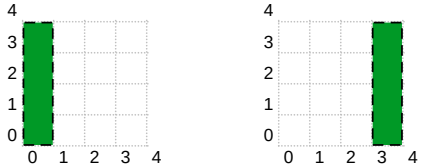
Le programme corrigé

```
cut([(X,Y)],L,H,piece(X,Y)) :- X #=< L, Y #=< H.
cut([(X,Y)],L,H,piece(Y,X)) :- Y #=< L, X #=< H.
cut(Pieces,Largeur,Hauteur,vertical(Cut,PlanA,PlanB)) :-
 fd_domain(Cut,1,Largeur),
 Cut#<Largeur,
 RestLargeur #= Largeur-Cut,
 SurfaceA #= Cut*Hauteur,
 SurfaceB #= RestLargeur*Hauteur,
 partition(Pieces,ResultA,ResultB,SurfaceA,SurfaceB),
 fd_labeling(Cut),
 cut(ResultA,Cut,Hauteur,PlanA),
 cut(ResultB,RestLargeur,Hauteur,PlanB).
cut(Pieces,Largeur,Hauteur,horizontal(Cut,PlanA,PlanB)) :-
    ...
```

Éviter des symétries

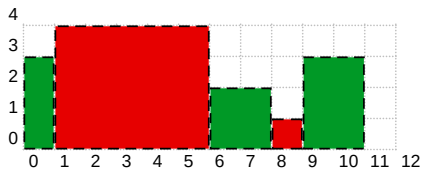
- On peut éviter la symétrie qui consiste en inverser la gauche et la droite, resp. le haut et le bas:
- Il suffit de renforcer la contrainte sur `Cut`:

```
2*Cut #=< Largeur,
```



Une optimisation

- Idée : on peut avoir un cas de base plus général
- Nouveau cas de base : on essaye de placer tous les morceaux côte à côte (ou empilés).



Le programme complet (1)

```
% calculate the total surface of a list of pieces
sumsurfaces([],0).
sumsurfaces([(X,Y)|R],Sum) :- sumsurfaces(R,RSum), Sum is

% put a list of pieces on end
onend([],[]).
onend([(X,Y)|T],[(X,Y)|RT]) :- X=<Y, onend(T,RT).
onend([(X,Y)|T],[(Y,X)|RT]) :- X>Y,  onend(T,RT).

cut(Pieces,Largeur,Hauteur,Plan) :-
     sumsurfaces(Pieces,S),
     S =< Hauteur*Largeur,
     onend(Pieces,PiecesOnEnd),
     c(PiecesOnEnd,Largeur,Hauteur,Plan).
```

Le programme complet (2)

```
c(Pieces,Largeur,Hauteur,Plan) :-
     listcut(Pieces,Largeur,Hauteur,Plan),!.
c(Pieces,Largeur,Hauteur,vertical(Cut,PlanA,PlanB)) :-
     fd_domain(Cut,1,Largeur),
     2*Cut #=< Largeur,
     RestLargeur #= Largeur-Cut,
     SurfaceA #= Cut*Hauteur,
     SurfaceB #= RestLargeur*Hauteur,
     partition(Pieces,ResultA,ResultB,SurfaceA,SurfaceB),
     nonempty(ResultA), nonempty(ResultB),
     fd_labeling(Cut),
     c(ResultA,Cut,Hauteur,PlanA),
     c(ResultB,RestLargeur,Hauteur,PlanB).
c(Pieces,Largeur,Hauteur,horizontal(Cut,PlanA,PlanB)) :-
    ...
```

Le programme complet (3)

```
listcut(Pieces, Largeur, Hauteur, list(Plan)) :-
Largeur #>= Hauteur, listcut_long(Pieces, Largeur, Hauteur, Plan
listcut(Pieces, Largeur, Hauteur, stack(Plan)) :-
Largeur #< Hauteur, listcut_long(Pieces, Hauteur, Largeur, Plan)

listcut_long([],_,_,[]).
listcut_long([(X,Y)|R], Largeur, Hauteur, [(X,Y)|PlanR]) :-
     Y #=< Hauteur,
     RestLargeur #= Largeur - X, RestLargeur #>= 0,
     listcut_long(R,RestLargeur,Hauteur,PlanR).
listcut_long([(X,Y)|R], Largeur, Hauteur, [(Y,X)|PlanR]) :-
     Y #> Hauteur,
     X #=< Hauteur,
     RestLargeur #= Largeur - Y, RestLargeur #>= 0,
     listcut_long(R,RestLargeur,Hauteur,PlanR).
```

Est-ce qu'on peut faire encore mieux?

- Il y a des symétries quand on a des morceaux identiques
  Exemple : `plan([(2,2),(2,2),(2,2)],4,4,Plan)`.
- Pour les éviter il faudrait changer la représentation du problème : Lister des morceaux différents, avec un entier qui donne le nombre de copies souhaitées.
  Exemple : `plan([(2,2):3],4,4,Plan)`.