Rappel du cours précédent

Le problème du contrebandier en GNU Prolog :

```
contrebandier(W,P,C) :-

      fd_domain([W,P,C],0,9),

      4*W + 3*P + 2*C #=< 9,
      15*W + 10*P + 7*C #>= 30,

      fd_labeling([W,P,C]).
```

- Souvent, un problème est modélisé par des contraintes, et on ne veut pas seulement une solution mais la "meilleure".
- C'est un problème d'optimisation.
- On définit une fonction objective (une fonction des solutions vers les réels) qui permet de classer les solutions.
- Un problème d'optimisation (C, f) est une contrainte C et une fonction objective f.
- Une affectation θ_1 est meilleure qu'une affectation θ_2, si $f(\theta_1) < f(\theta_2)$.
- Une solution optimale est une solution de C telle qu'il n'y a pas de meilleure solution de C.

Exemple

- $C : X + Y \geq 4$
- $f(X, Y) := X^2 + Y^2$
- Solution optimale $\{X \leftarrow 2, Y \leftarrow 2\}$
- Il y a des problèmes d'optimisation qui n'ont pas de solution, pour deux raisons :
  - la contrainte n'a pas de solution: $(X \geq 2 \wedge X \leq 0, X^2)$
  - le problème n'a pas d'optimum: $(X \leq 0, X)$
- La solution optimale, quand elle existe, n'est pas toujours unique.

Deux approches à l'optimisation

- Chercher une solution optimale par un *programme*, en se servant d'un solutionneur de contraintes.
  Exemple : solutions optimales pour des contraintes sur domaine fini.
- Intégration de l'optimisation dans le solutionneur de contraintes.
  Exemple : l'algorithme simplex pour les contraintes et fonctions objectives linéaires sur $\mathbb{R}$.

Optimisation pour CSP sur domaine fini

Puisque les domaines sont finis, on peut facilement utiliser un solutionneur pour construire un optimiseur.
Idée naïve :

- Résoudre la contrainte C.
- Évaluer la fonction objective f sur toutes les solutions de C.
- Renvoyer la solution de C avec la valeur minimale pour f.

Inefficace quand C a beaucoup de solutions.

Optimisation en réessayant

- Soit $intsolv(C, D)$ un solutionneur qui rend soit un domaine simple qui est une solution, ou *faux*.
- Chercher une solution avec valeur minimale de l'expression f.
- *meilleure* contient la meilleure solution jusqu'à présent.
- $reessayeintopt(C, D, f, meilleure)$
  - $D_2 := intsolv(C, D)$
  - Si D_2 est un domaine faux, retourne *meilleure*
  - Soit *sol* une solution qui correspond à D_2
  - retourne $reessayeintopt(C \wedge f < sol(f), D, f, sol(f))$

Exemple optimisation en réessayant

- Sac du contrebandier.
- $4W + 3P + 2C \leq 9 \wedge 15W + 10P + 7C \geq 30$ et $D(W) = [0..9]$, $D(P) = [0..9]$, $D(C) = [0..9]$
- En général : on cherche de *minimiser* une fonction. Donc ici : fonction objective : - Profit.
- Le contrebandier veut minimiser sa perte $-15W - 10P - 7C$.
- On utilise la recherche par retour en arrière avec bornes consistances : première solution : $D(W) = \{0\}$, $D(P) = \{1\}$ et $D(C) = \{3\}$. Perte de -31 ou profit de 31
- Nouveau problème en ajoutant $-15W - 10P - 7C < -31$

Exemple suite

- On recommence la recherche par retour en arrière
- D'abord $D(W) = [0..2]$,$D(P) = [0..3]$,$D(C) = [0..4]$
- Mais maintenant le choix de $W = 0$ donne un domaine faux par propagation
- On essaie $W = 1$ et ça donne $D(W) = \{1\}$, $D(P) = \{1\}$ et $D(C) = \{1\}$ avec une perte de -32
- On ajoute $15W - 10P - 7C < -32$ et on recommence: pas de solution, donc 32 est le meilleur profit possible.

Problème: On refait des calculs plusieurs fois !

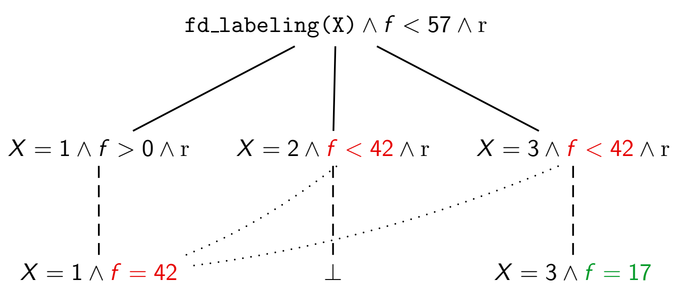
Contrebandier en réessayant en Prolog

```
contrebandier(W,P,C,Profit) :- retry(0,0,0,0,W,P,C,Profit).

% cherche la meilleure solution pour W,P,C,Profit
% sachant que WOld, POld,COld,ProfitOld est déjà une solution
retry(WOld,POld,COld,ProfitOld,W,P,C,Profit) :-
    cb(ProfitOld,WBetter,PBetter,CBetter,ProfitBetter) ->
    retry(WBetter,PBetter,CBetter,ProfitBetter,W,P,C,Profit) ;
    W=WOld, P=POld, C=COld, Profit=ProfitOld.

% cherche une solution t.q. Profit est mieux que ProfitOld
cb(ProfitOld,W,P,C,Profit) :-
    fd_domain([W,P,C],0,9),
    4*W + 3*P + 2*C #=< 9,
    15*W + 10*P + 7*C #= Profit,
    Profit #> ProfitOld,
    fd_labeling([W,P,C]).
```

Optimisation par retour en arrière

- On combine retour en arrière avec optimisation.
- À chaque étape dans le parcours de l'arbre de recherche, si *meilleure* est la meilleure solution jusqu'à présent, on ajoute la contrainte $f <$ *meilleure*.
- Cela évite de refaire tout le parcours de l'arbre de recherche jusqu'à l'endroit où on avait trouvé *meilleure*.

Optimisation par retour en arrière

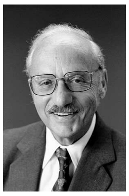


Exemple : contrebandier

- La première solution trouvée est : $\{W \leftarrow 0, P \leftarrow 1, C \leftarrow 3\}$ avec perte de -31. On mémorise cette solution comme meilleure jusqu'à présent
- Le retour en arrière revient sur $D(W) = \{0\}$, $D(P) = [1..3]$, $D(C) = [0..4]$ et on ajoute la nouvelle contrainte $-15W - 10P - 7C < -31$.
- On essaie $P = 2$ et $P = 3$. Cela donne un domaine faux
- On revient sur $D(W) = [0..2]$, $D(P) = [1..3]$, $D(C) = [0..4]$ et on essaie $W = 1$.
- Propagation donne $D(W) = \{1\}$, $D(P) = \{1\}$, $D(C) = \{1\}$ avec perte -32. Donc nouvelle meilleure solution.

L'algorithme simplex

- L'algorithme d'optimisation le plus couramment utilisé
- Du à George Dantzig, 1947.



- Optimise une fonction linéaire par rapport à des contraintes linéaires
- Lié à l'élimination Gauss-Jordan

Un problème d'optimisation (C, f) est en forme simplex, si

- C est une conjonction de C_e et C_i
- C_e est une conjonction d'équations linéaires
- C_i est la conjonction des inéquations

  $$X_1 \geq 0 \wedge \ldots \wedge X_n \geq 0$$

  où $free(C_e) \subseteq \{X_1, \ldots, X_n\}$.
  Donc : toutes les variables non négatives.
- f est une expression linéaire sur des variables de C

Exemple : Minimiser $3X + 2Y - Z + 1$ par rapport à

$$\begin{array}{lllll} X & +Y & & & = 3 \\ -X & -3Y & +2Z & +T & = 1 \\ \multicolumn{5}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0} \end{array}$$

L'idée de l'algorithme simplex

- Les contraintes $C_e \wedge C_i$ définissent un *simplex* :

- Tous les points avec la même valeur pour f forment un plan.
- L'optimum se trouve sur un coin du simplex.
- On commence dans un coin, et puis on continue sur les arrêtes dans une direction où f croit.

4 classes de problèmes

Forme générale : équations et inéquations quelconques sur $\mathbb{Z}$

$\downarrow$

Forme simplex

$\downarrow$

Forme simplex de base (voir plus tard)

$\downarrow$

Forme simplex résolue (voir plus tard)

Mettre en forme simplex

Un problème peut être mis en forme simplex en

- remplaçant des variables X par $X^+ - X^-$
- remplaçant des inéquations $e \leq r$ par $e + s = r$ où s est une nouvelle variable (angl: *slack variable*)
- mettant $X \geq 0$ pour toute variable X

Exemple mise en forme simplex

Minimiser $Y + Z$ par rapport à

$$\begin{array}{rcl} X & = & 10 + Y \\ Y & \geq & Z \end{array}$$

Minimiser $Y^+ - Y^- + Z^+ - Z^-$ par rapport à

$$\begin{array}{rcl} X^+ - X^- & = & 10 + Y^+ - Y^- \\ Y^+ - Y^- & = & Z^+ - Z^- + R \end{array}$$
$$X^+ \geq 0, X^- \geq 0, Y^+ \geq 0, Y^- \geq 0, Z^+ \geq 0, Z^- \geq 0, R \geq 0$$

Rappel : système d'équations en forme résolue

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \beta_1 + \alpha_{1,1} y_1 + \ldots \alpha_{1,m} y_m \\ & \vdots & \\ x_n & = & \beta_n + \alpha_{n,1} y_1 + \ldots \alpha_{n,m} y_m \end{array}$$

- *paramètres* : $y_1, \ldots, y_m$
- *non-paramètres* : $x_1, \ldots, x_n$
- toutes variables différentes
- $\{x_1, \ldots, x_n\} \cap \{y_1, \ldots, y_m\} = \emptyset$.

Forme simplex de base

Un problème d'optimisation simplex est en forme de base, si

- Toutes les équations sont en forme résolue
- Chaque constante à droite est non négative
- Seulement des variables paramètres apparaissent dans la fonction objective

On obtient une solution de base en instanciant chaque paramètre avec 0 et chaque non-paramètre avec la constante dans son équation (attention, c'est une solution de la contrainte, mais pas forcement optimale!)

Exemple

Un problème simplex en forme de base:

Minimiser $10 - Y - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{lcll} X & = & 3 & -Y \\ T & = & 4 & +2Y \quad -2Z \\ \multicolumn{4}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0} \end{array}$$

On obtient une solution de base et sa valeur objective:

$$\{X \leftarrow 3, T \leftarrow 4, Y \leftarrow 0, Z \leftarrow 0\}$$

et $f = 10$

Forme simplex résolue

- Forme *résolue* : forme simplex de base où la fonction objective ne contient pas de variables avec coefficient négatif.
- Dans ce cas, on obtient la solution optimale on mettant tous les paramètres à la valeur 0.
- But : transformer une forme simplex de base en une forme simplex résolue équivalente !

Algorithme simplex

On commence par un problème en forme de base

- Répéter
  - Choisir une variable y avec un coefficient négatif dans la fonction objective (la *variable de pivot*)
  - Choisir une équation $x = b + cy + \ldots$ avec $c < 0$ (s'il y en a plusieurs : choisir tel que $-b/c$ minimal)
  - Réécrire cette équation en $y = -b/c + (1/c)x + \ldots$ (pivoter)
  - Substituer $-b/c + (1/c)x + \ldots$ pour y dans toutes les autres équations et dans la fonction objective
- jusqu'à ce qu'il n'existe pas une telle variable y ou une telle équation
- Si un tel y n'existe pas une solution optimale est trouvée
- Sinon il n'y pas de solution optimale

Exemple

Minimiser $10 - Y - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{lcll} X & = & 3 & -Y \\ T & = & 4 & +2Y \quad -2Z \\ \multicolumn{4}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0} \end{array}$$

On choisit Y et la première équation.

Exemple (suite)

Minimiser $7 + X - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{rcl} Y & = & 3 \quad -X \\ T & = & 10 \quad -2X \quad -2Z \\ \multicolumn{3}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0} \end{array}$$

On choisit Z et la deuxième équation.

Exemple (suite)

Minimiser $2 + 2X + 0.5T$ par rapport à

$$\begin{array}{rcl} Y & = & 3 \quad -X \\ Z & = & 5 \quad -X \quad -0.5T \\ \multicolumn{3}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0} \end{array}$$

On ne peut plus choisir de variable, valeur optimale: 2

Les cas où le minimum n'existe pas

Minimiser $1 - X - Y$ par rapport à

$$\begin{array}{rcl} T & = & 1 + X + Y \\ U & = & 2 + X + Y \\ \multicolumn{3}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, T \geq 0, U \geq 0} \end{array}$$

- Les valeurs de X et de Y peuvent être arbitrairement grandes.
- La valeur de $1 - X - Y$ peut être arbitrairement petit.

Comment obtenir une solution de base ?

- Résoudre un problème simplex différent :
  - Ajouter des variables artificiellement pour obtenir des équations en forme de base
  - Minimiser la somme des variables artificielles
  - Si la somme est 0 on peut construire une forme résolue de base pour le problème initiale

Exemple

Minimiser $3X + 2Y - Z + 1$ par rapport à

$$\begin{array}{lllll} X & +Y & & & = 3 \\ -X & -3Y & +2Z & +T & = 1 \\ \multicolumn{5}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0} \end{array}$$

On ajoute deux variables artificielles A_1 et A_2 et on obtient:

Exemple (suite)

Minimiser $A_1 + A_2$ par rapport à

$$\begin{array}{lllllll} A_1 & = & 3 & -X & -Y & & \\ A_2 & = & 1 & +X & +3Y & -2Z & -T \\ \multicolumn{7}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0} \end{array}$$

On réécrit la fonction objective en substituant les variables artificielles : $4 + 2Y - 2Z - T$
On choisit T et la deuxième équation :

Exemple (suite)

Minimiser $3 - X - Y + A_2$ par rapport à

$$\begin{array}{lllllll} A_1 & = & 3 & -X & -Y & & \\ T & = & 1 & +X & +3Y & -2Z & -A_2 \\ \multicolumn{7}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0} \end{array}$$

On choisit X et la première équation :

Exemple (suite)

Minimiser $A_1 + A_2$ par rapport à

$$\begin{array}{lllllll} X & = & 3 & -Y & & -A_1 & \\ T & = & 4 & +2Y & -2Z & -A_1 & -A_2 \\ \multicolumn{7}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0, A_1 \geq 0, A_2 \geq 0} \end{array}$$

On substitue 0 pour A_1 et A_2 et dans la fonction objective originale les non-paramètres:

Exemple (suite)

Minimiser $10 - Y - Z$ par rapport à

$$\begin{array}{lcl} X & = & 3 \quad -Y \\ T & = & 4 \quad +2Y \quad -2Z \\ \multicolumn{3}{l}{X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0, T \geq 0} \end{array}$$

Comment construire la forme de base ?

En général, il y a trois cas:

- La valeur optimale de la fonction objective du problème modifié est > 0
  - Le problème original est insatisfaisable.
- La valeur optimale est 0 et toutes les variables artificielles sont des paramètres
  - Après élimination des variables artificielles on obtient une forme de base
- La valeur optimale est 0, mais pas toutes les variables artificielles sont des paramètres
  - Si une des variables de la partie droite est une des variables originales, on peut réécrire l'équation avec cette variable à gauche et ainsi de suite.

Cycles

- Une solution de base est dégénérée, si une variable non-paramètre prend la valeur 0.
- Dans ce cas, il y a un danger d'un cycle.
- Il y a des règles simples pour éviter des cycles, par exemple en ordonnant les variables : on choisit comme variable pivot toujours la variable la plus petite parmi les variables avec un coefficient négatif dans la fonction objective.

Optimisation sur $\mathbb{Z}$

- L'algorithme simplex est défini sur des domaines réels.
- On peut l'utiliser aussi comme ingrédient de base pour des problèmes d'optimisation sur les entiers.
- Mais on doit résoudre *plusieurs* problèmes d'optimisation sur $\mathbb{R}$.

Optimisation sur $\mathbb{Z}$

- Optimisation branch and bound pour (C, f) où C est une contrainte sur les entiers et f une fonction à minimiser
  - Utiliser simplex pour trouver un optimum réel
  - Si la solution est entière : la retourner
  - Sinon choisir une variable x avec une valeur optimale non entière d et considérer récursivement les problèmes
    - $(C \wedge x \leq \lfloor d \rfloor, f)$
    - $(C \wedge x \geq \lceil d \rceil, f)$
  - On garde en mémoire la meilleure solution entière trouvée jusqu'à présent
  - Si on a déjà trouvé une solution sur les entiers, alors tout problème avec une plus grande meilleure solution sur les réels peut être abandonné